

Máster Interuniversitario en Estadística e Investigación Operativa

Título: Funciones de distorsión en la cuantificación del riesgo de pérdida

Autor: Ana Victoria Rodríguez Segura

Director: Catalina Bolancé

Departamento: Departamento de Econometría, Estadística y Economía Española

Universidad: Universitat de Barcelona



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Facultat de Matemàtiques i Estadística



Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Trabajo de Fin de Máster

***Funciones de distorsión en la cuantificación
del riesgo de pérdida***

Autora: Ana Victoria Rodríguez Segura

Directora: Catalina Bolancé

Máster en Estadística e Investigación Operativa

Universitat de Barcelona
Departamento de Econometría, Estadística y Economía Española

Septiembre 2015

Resumen

La creciente importancia por parte de las entidades financieras y de seguros de poder medir y cuantificar el riesgo al que están expuestas, ha abierto una brecha importante en la gestión de riesgo. Las exigencias de solvencia por parte de los organismos regulatorios para hacer frente a la pérdida procedente de sus actividades se cuantifica a través de medidas de riesgo. Dentro de las diferentes medidas de riesgos que se encuentran en la literatura en este trabajo abordaremos las medidas de riesgos basadas en funciones de distorsión, específicamente utilizaremos funciones de distorsión no lineales para cuantificar el riesgo. La ventaja que produce utilizar estas medidas de riesgo es que preponderan las probabilidades iniciales de la distribución de la pérdida y dan más pesos a los valores en la cola derecha de la distribución asociada a las pérdidas mayores.

Palabras claves: medida de riesgo, función de distorsión, pérdida, probabilidad

Abstract

The growing importance, of the financial and insurance institutions, to be able to measure and quantify the risk to which they are exposed, has opened an important gap in risk management. The solvency requirements by the regulatory agencies to deal with the losses from operations is quantified through risk measurements. Among the various risk measurements encountered in literature regarding this work, we will address measurements based on distorted functions, specifically, we will use nonlinear distorted functions to quantify the risk. The advantage of these risk measurements, is the preponderance of the initial probabilities of the distribution of the loss while giving more weight to the values at the right tail of the distribution, associated with the higher losses.

Keywords: risk measure, distortion function, probabilities

Índice

Resumen	3
Abstract	4
1 Introducción	7
1.1 Motivación y Objetivos	7
1.2 Estructura de la memoria	8
2 Riesgo y Medidas de Riesgo	9
2.1 Riesgo	9
2.1 Medidas de Riesgo Coherentes	10
2.3 Medidas de riesgo convexas	12
2.4 Medida de Riesgo Espectral	12
2.5 Medidas de desviación	13
2.6 Medidas Acotadas en Media	14
3 Medidas de riesgos basadas en funciones de distorsión	15
3.1 Medidas de riesgo distorsionadas	15
3.2 Propiedades de las Medidas de Riesgos Distorsionadas	17
3.3 Funciones de Distorsión	19
3.3.1 VaR	20
3.3.2 CVaR	21
3.3.3 Función Distorsionada PH (Proportional Hazard)	22
3.3.4 Función de Distorsión DP (Dual-Power)	23
3.3.5 Función de Distorsión Exponencial	23
3.3.6 Función de Distorsión Cuadrática	24
3.3.7 Función de Distorsión de Potencia (Power Function)	25
3.3.8 Función de Distorsión de Gini	26
4 Estimación no paramétrica de la función de supervivencia	29
4.1 Distribución Empírica	30
4.2 Estimador Núcleo Clásico (CKE)	30
4.3 Estimador Núcleo Doble Transformado (DTKE)	32

4.4 Estimador Núcleo Clásico con técnica Reductora de Sesgo (BCCKE)	34
4. 5 Estimador Núcleo Doble Transformado con técnica Reductora de Sesgo (BCDTKE)	35
5 Aplicación de las medidas de riesgos basadas en funciones de distorsión	36
5.1 Descripción y análisis de los datos	36
5.2 Resultados	37
Conclusión	46
Bibliografía	47
Apéndice	49
Tablas	49
Código R	51
Funciones de distorsión y medida de riesgo	51
Métodos de estimación de la fda	52
Resultados	58

1 Introducción

1.1 Motivación y Objetivos

La medición del riesgo está generando un gran interés por parte de las entidades financieras y las aseguradoras. Poder medir y cuantificar el riesgo se ha convertido en uno de los principales objetivos de estas entidades ya que, si son capaces de medir sus niveles de riesgos, a su vez, podrán gestionarlos y hacer frente a estos. Además, una correcta medición de los mismos les permite garantizar su solvencia como entidad.

Tomando en cuenta que el capital requerido para cada entidad no solo depende del nivel de inversión, sino también, de la medida de riesgo seleccionada, se han expuesto en la literatura diferentes tipos de medidas de riesgo con el objetivo de acercarse cada vez más a una correcta medición y cuantificación del riesgo. Se desean medidas de riesgos eficientes para tener una gestión robusta, y que estas medidas no solo tome en cuenta la probabilidad de ocurrencia de un evento negativo, sino también su magnitud.

En este trabajo presentamos una clase de medidas de riesgos poco estudiadas en la literatura y que fueron introducidas por Wang (1996), llamadas medidas de riesgos basadas en funciones de distorsión. Las funciones de distorsión fueron desarrolladas por Yaari (1987), en la llamada teoría dual de elección bajo incertidumbre. Esta teoría fue desarrollada como un marco alternativo a la Teoría de la Utilidad Esperada de Neumann & Morgenstern (1947), la cual representa a los decisores aversos al riesgo mediante una función de utilidad cóncava. En este caso Yaari utiliza los cuatro axiomas principales de esta teoría, pero modifica el quinto axioma de independencia, y en su lugar, propone el axioma de independencia dual. Más adelante presentaremos estos 4 axiomas propuestos en el campo actuarial por Wang et al. (1998).

Al modificar el quinto axioma lo que se pretende es representar la aversión al riesgo modificando las probabilidades, es decir, que los eventos con mayor pérdida parezcan ser más probables de lo que son en realidad.

En este caso se propone calcular el riesgo de una posición o prima, iniciando con la función de distribución del riesgo X , después aplicando una distorsión a su función desacumulativa $S_X(x) = Pr(X \geq x)$, y por último, obteniendo la esperanza de X a partir de la probabilidad distorsionada.

El segundo punto de este trabajo consiste en estimar esa función desacumulativa $S_X(x) = Pr(X \geq x)$ por distintos métodos no paramétricos y calcular la medida de riesgo distorsionada. Estos métodos en realidad estiman la función de distribución

acumulada $F_X(x) = \Pr(X < x)$, pero a través de la estimación de la fda obtenemos a $S_X(X)$ por $1 - F_X = S_X$.

Los diferentes métodos a utilizar son muy convenientes cuando la distribución de la pérdida presenta colas pesadas y permiten evaluar la gravedad de la misma. Específicamente, en este trabajo utilizaremos la distribución empírica, el estimador núcleo clásico (CKE—Classical Kernel Estimator), estimador núcleo doble transformado (DTKE- Double Transformed Kernel Estimator) propuesto por Alemany et al. (2013), estimador núcleo clásico con técnica reductora de sesgo (BCKKE, Bias Corretion Classical Kernel Estimator) propuesto por Kim et al. (2006), y por último, el estimador núcleo doble trasformado con técnica reductora de sesgo (BCDTKE- Bias Corretion Double Trasformed Kernel Estimator) propuesto por Bolancé et al (2014).

1.2 Estructura de la memoria

La estructura de la memoria está organizada se la siguiente forma: En el capítulo 2 abordaremos el concepto de riesgo y los distintos tipos de medidas de riesgos existentes, además de las propiedades que deben cumplir estas medidas para ser consideradas eficientes a la hora de cuantificar el riesgo. En el capítulo 3 ampliaremos el concepto de las medidas de riesgos basadas en funciones de distorsión, la describiremos y analizaremos las propiedades de las principales funciones de distorsión. La estimación de la función desacumulativa por los distintos métodos no paramétricos será planteado en la sección 4. En la sección 5 se mostraran los resultados de aplicar las distintas medidas de riesgos basadas en funciones de distorsión conjuntamente con los diferentes métodos de estimación de la $S_X(x)$ a un conjunto de datos. Y por último, concluimos.

Al final del documento incluimos un conjunto de apéndices con algunos de los resultados no expuestos en el cuerpo del trabajo. Básicamente se incluyen algunas tablas con los resultados de aplicar las medidas de riesgo basadas en funciones de distorsión al conjunto de datos cambiando el valor del parámetro de aversión al riesgo, además del código R con la programación de las funciones de distorsión, medida de riesgo, métodos no paramétricos para la estimación de la fda y los resultados de las figuras y tablas realizados en dicho programa.

2 Riesgo y Medidas de Riesgo

2.1 Riesgo

El riesgo es entendido como la posibilidad de que se produzcan pérdidas debido a un suceso. Este concepto está relacionado intuitivamente con la naturaleza incierta del mismo, es decir, asumimos que puede haber un riesgo cuando los efectos de que ocurra un suceso, específicamente aleatorio, podrían resultar en pérdidas. Si no existe ese efecto aleatorio y no hay incertidumbre en torno al riesgo podemos predecir y saber con certeza cuáles son las consecuencias negativas de la ocurrencia de dicho suceso.

Sin embargo, en el mundo financiero y actuarial el riesgo asociado a sus operaciones tiene un carácter aleatorio y si no se gestiona y cuantifica adecuadamente se podría incurrir en grandes pérdidas económicas. Es por esto que ha surgido la necesidad durante los últimos años de desarrollar diferentes medidas de riesgos para distintos propósitos. Entre los que se encuentra:

- Determinación del capital requerido por la empresa, para mantener un nivel de solvencia adecuado. Esto implica determinar la cantidad de capital necesario que requiere la institución para tenerlo como amortiguador ante pérdidas inesperadas. Para determinar el nivel de solvencia es necesario cuantificar los posibles riesgos a los que se enfrenta la empresa.
- Cálculo de prima de riesgo. Las aseguradoras reciben una prima como la contraprestación económica por asumir el riesgo del objeto asegurado. En este caso la pérdida esperada más un recargo del riesgo ha de ser equivalente a la prima cobrada. Por consiguiente, una adecuada medida de riesgo determina el costo de esta prima. .

En la literatura se encuentran múltiples publicaciones acerca de cómo medir el riesgo, su importancia y la forma correcta de abordarlo. Entre el número de posibilidades de cuantificar el riesgo se encuentran: 1) aproximación nocional / nominal, donde se suman los valores nocionales/ nominales de cada riesgo de la cartera, sin embargo, si estamos trabajando con carteras de inversión esta medida no toma en cuenta la diversificación. 2) Medidas de sensibilidad, miden el cambio del valor de la variable de interés ante pequeñas variaciones en los valores de otras variables de las que esta depende, en el caso de una cartera de inversión, esta medida mide el cambio en el valor de la cartera debido a un cambio en uno de los factores de riesgos asociado a esta. 3) Desviación típica y varianza, propuesta por Harry Markowitz (1952), esta medida es efectiva solo en el caso en que las rentabilidades sean normales, si la distribución de las rentabilidades no es normal y presenta una fuerte asimetría, colas pesadas y valores extremos tiende a subestimar el riesgo. 4) Medidas basadas en el cuantil de la variable aleatoria que identificamos como riesgo. Entre estas últimas la más famosa es el Valor en riesgo (VaR-Value-at-Risk) que ha sido la herramienta

preferida para estimar el riesgo del mercado financiero. Dado un horizonte temporal y un nivel de confianza α , el VaR es la pérdida máxima sobre el horizonte temporal T que solo es superada con una probabilidad $1 - \alpha$.

El VaR ha sido la medida global de riesgo presentada por el comité de Basilea II. Esta medida presenta algunas características deseables como su simplicidad para calcularlo, es intuitivo para identificar la pérdida máxima a la que una entidad está expuesta dado una pequeña probabilidad, amplia aplicabilidad tanto en el sector financiero como actuarial, se expresa en términos de dinero perdido y es universal y, por último, se aplica a cualquier fuente de riesgo. No obstante, esta medida exhibe algunos problemas como manifestó Artzner et al. (1999) si la distribución de la variable riesgo no sigue una distribución normal y, por lo tanto, presenta colas pesadas y mucha asimetría, el VaR no recoge estos valores extremos, lo que implica grandes problemas a la hora de estimar el riesgo. A pesar de que este tiene un control sobre la probabilidad de la pérdida después de cierto valor pautado no da más información acerca de un valor aproximado de dicha pérdida. Además, el Valor en Riesgo no se considera una medida coherente, término que abordaremos más adelante, ya que no cumple con la propiedad subaditividad, esto implica que muchas veces en vez de promover la diversificación en una cartera de inversión este termine penalizándola.

Han surgido otras alternativas al VaR que se basan igualmente en el cuantil de la variable aleatoria como es el *Valor en Riesgo Condicional* (Conditional Value at Risk, CVaR), que no es más que la esperanza matemática de la pérdida condicionado a que esta sea mayor que el VaR. Esta medida goza de mejores propiedades que el VaR ya que toma en cuenta la diversificación, entendiendo que mayor diversificación reduce el riesgo.

2.1 Medidas de Riesgo Coherentes

Artzner et al. (1999), en su preocupación de cómo debía de ser una medida de riesgo, definieron formalmente algunas características que debían satisfacer estas e introdujo el concepto de, medida de riesgo “Coherente”. Consideremos una medida de riesgo $\rho: X \rightarrow \mathbb{R}$, que asigna un valor numérico a una variable aleatoria que representa una pérdida. Dado un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) definimos a X sobre este espacio representando el espacio de todas las variables aleatorias delimitadas.

Una medida de riesgo ha de permitir poder calcular de una manera correcta las primas que ha de cobrar una compañía de seguros, por ejemplo. Y se entiende por una manera correcta, el que dichas primas reflejen adecuadamente la incertidumbre que va inherente a la distribución de la variable aleatoria definida con anterioridad como X (pérdida). Por otro lado, una medida incorrecta del riesgo podría conducir a estimaciones muy alejadas del verdadero riesgo al que está expuesta una entidad financiera o de seguros y, a su vez, provocar grandes pérdidas económicas que no se tenían contempladas. Es por esto la importancia de aplicar métodos que permitan una

medición más exacta y precisa del riesgo para garantizar la estabilidad financiera. Además, es importante que las medidas de riesgo gocen de ciertas propiedades que la hagan deseables en cuanto a la medición del riesgo como definió Artzner et al. (1999). No obstante, en el contexto actuarial estas propiedades fueron expuestas independientemente por Wang et al. (1997). A continuación se presentan estas propiedades.

Consideraremos $\rho: X \rightarrow \mathbb{R}$, una medida de riesgo coherente, si para cualesquiera X, Y satisface las siguientes condiciones:

Invarianza por traslaciones:

$$\rho(X + \alpha) = \rho(X) + \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Esto implica que si se invierte un capital adicional en una posición financiera o cartera, el riesgo ha de disminuir en la cuantía de ese capital invertido. En la versión actuarial es diferente, ya que si agregamos esa cuantía α a la siniestralidad, el riesgo aumenta en lugar de disminuir.

Homogeneidad positiva:

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X) \quad \forall \lambda \geq 0.$$

En este caso si cambiamos el tamaño de una posición multiplicándola por un factor $\lambda > 0$, el riesgo cambiará en la misma proporción.

Monotonía:

$$\rho(X) \leq \rho(Y), \quad \forall X, Y \text{ siendo } X \leq Y$$

Si una posición tiene una rentabilidad mayor que otra en cualquier escenario posible, el riesgo de la primera ha de ser menor que el de la segunda. Sin embargo, en la versión actuarial esto cambia, ya que si una cartera tiene mayor siniestralidad que otra, el riesgo de la primera debe de ser mayor que el de la segunda.

Subaditividad:

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y), \quad \forall X, Y$$

Esta propiedad implica que el riesgo global de una cartera o portafolio de dos o más activos es menor o igual que la suma de estos de forma individual, esta característica es de esencial importancia ya que refleja la idea de que el riesgo puede reducirse a través de la diversificación. Además, esta propiedad ha sido la más discutida entre las

medidas de riesgo coherentes, esencialmente porque descarta al Valor en Riesgo como una medida adecuada y sirve para el planteamiento y solución de problemas de optimización de carteras.

2.3 Medidas de riesgo convexas

Föllmer and Schied (2002) introducen el estudio de las medidas de riesgo convexas considerando que el riesgo asociado a algunas posiciones financieras no crece linealmente con el tamaño de la posición.

En efecto, proponen que las propiedades de subaditividad y homogeneidad positiva sean sustituidas por una condición más débil como es la convexidad:

Convexidad:

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y), \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

Esta nueva condición nos indica que en efecto la convexidad no aumenta el riesgo, dado que el riesgo de la cartera diversificada es menor o igual a la media reponderada de los riesgos individuales.

Como ya se ha visto, toda medida de riesgo que cumpla con las propiedades de coherencia es convexa, sin embargo, no todas las medidas convexas son coherentes.

2.4 Medida de Riesgo Espectral

Las medidas de riesgo espectrales fueron introducidas por Acerbi (2002) como un subconjunto de las medidas de riesgo coherentes. Estas pueden ser parametrizadas por una función de aversión al riesgo. Específicamente, estas son medidas de riesgo coherentes que tienen dos propiedades adicionales:

Aditividad comonotónica:

Si X y Y son variables aleatorias comonotónicas, entonces

$$\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)$$

Se dice que dos variables aleatorias X y Y son comonotónicas si satisfacen,

$$(X(\omega) - X(\omega'))(Y(\omega) - Y(\omega')) \geq 0, \quad \forall (\omega, \omega'),$$

siendo ω, ω' dos sucesos eventuales. Esta propiedad quiere decir que dos riesgos son comonótonos si presentan una relación de dependencia lineal entre ellos, esto es, si son linealmente dependientes. La comonotonía implica la relación de dependencia positiva más fuerte.

Invarianza en ley:

$$\text{Si } P(X \leq u) = P(Y \leq u) \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad \text{entonces } \rho(X) = \rho(Y)$$

Esta propiedad nos dice que si X y Y son dos variables aleatorias con la misma función de distribución, entonces el riesgo es el mismo.

Las medidas de riesgo espectrales nos permiten asociar la medida de riesgo con la actitud del inversor hacia el riesgo. Dado este hecho, podemos esperar que, en igualdad de condiciones, si un inversor tiene una mayor aversión al riesgo, entonces debe enfrentar un riesgo más alto, según lo dado por el valor de la medida de riesgo espectral.

El valor en riesgo no es una medida espectral, como se había comentado anteriormente, ya que no es una medida coherente, y además, no satisface la propiedad de aditividad comonotónica. Sin embargo, el CVaR es una medida coherente y a la vez convexa que satisface las condiciones de invarianza en ley y comonotonicidad. Además, no es la única medida que satisface estas condiciones. Existen otras medidas coherentes que también la satisfacen, las cuales serán estudiadas más adelante.

2.5 Medidas de desviación

Rockafeller et al. (2002) proponen las medidas de desviación, definiéndolas como medidas positivas, además de cumplir con las propiedades de subaditividad, homogeneidad positiva e invarianza por traslaciones. Estas medidas son utilizadas mayormente por inversionistas con aversión al riesgo.

2.5.1 Definición: Una medida de riesgo, es considerada una medida de desviación si cumple las siguientes condiciones:

Cambio invariante: $\rho_D(X + c) = \rho_D(X)$ para todo X y constante c .

Normalización: $\rho_D(0) = 0$ y $\rho_D(\lambda X) = \lambda \rho_D(X)$ para todo X y todo $\lambda > 0$.

Sublinealidad: $\rho_D(X + Y) \leq \rho_D(X) + \rho_D(Y)$ para todo X, Y .

Positividad: $\rho_D(X) > 0$ para todo X no constante, mientras que $\rho_D(X) = 0$ para todo X constante.

La varianza y la semivarianza son las medidas de desviación más utilizadas en la práctica.

2.6 Medidas Acotadas en Media

Estas medidas fueron propuestas al igual que la medida de desviación por Rockafeller et al. (2002). En este caso imponen las condiciones de subaditividad, homogeneidad positiva, invarianza por traslaciones y una nueva propiedad denominada propiedad de media acotada.

2.6.1 Definición: Una medida de riesgo, es considerada una medida de desviación si cumple las siguientes condiciones:

Cambio invariante: $\rho R(X + c) = \rho R(X) + c$ para todo X y constante c .

Normalización: $\rho R(0) = 0$ y $\rho R(\lambda X) = \lambda \rho R(X)$ para todo X y todo $\lambda > 0$.

Sublinealidad: $\rho R(X + Y) \leq \rho R(X) + \rho R(Y)$ para todo X, Y

Media acotada: $\rho R(X) > E[-X]$ para todo X no constante, mientras que $\rho R(X) = E[-X]$ para todo X y constante.

Entre las medidas de desviación y las medidas acotadas en media existe una estrecha relación. Se puede derivar medidas de desviación a través de medidas de riesgo acotadas en media y viceversa.

3 Medidas de riesgos basadas en funciones de distorsión

3.1 Medidas de riesgo basadas en funciones de distorsión

Las medidas de riesgo basadas en funciones de distorsión serán el principal pilar de este trabajo.

Tanto Yaari (1987) como Wang (1998) probaron que estas medidas de riesgos mantienen ciertas propiedades, si y sólo si, las probabilidades distorsionadas están fundamentadas en la Integral de Choquet.

Al estudiar las medidas de riesgo de posiciones financieras y actuariales, se sabe que estas son definidas a través de la Integral de Choquet de la variable aleatoria de las ganancias y pérdidas.

Definición 3.1.1 Considera una función del conjunto $g: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$, definida en el σ -álgebra \mathcal{F} . Asumiendo que la función del conjunto g es finita, y monótona; esto es $g(\emptyset) = 0, g(\Omega) < \infty$, y $A \subset B \Rightarrow g(A) \leq g(B)$, para todo $A, B \in \mathcal{F}$. Dado una variable aleatoria X , no negativa, la Integral de Choquet de X con respecto a g puede ser evaluada como:

$$\rho_g[X] = \int X dP^* = \int X^+ dP^* - \int X^- dP^* \quad (1)...$$

donde P^* es la función de probabilidad distorsionada con la función g . Por lo tanto, la función g es llamada función de distorsión, y $P[A], P[B]$ probabilidades distorsionadas.

Considerando el caso especial de las medidas de riesgo basadas en una probabilidad distorsionada. Se puede demostrar (Wang 1996) que la integral de Choquet de una variable aleatoria X , con respecto a una función de distorsión g , es equivalente al valor esperado de la variable X en virtud de la probabilidad distorsionada P (correspondiente con distribución F^* y función de supervivencia $S^* = 1 - F^*$)¹

Definición 3.1.2. Una función de distorsión g es una función $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ no-decreciente, que cumple $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$.

$$\begin{aligned} {}^1 E_{P^*} &= \int_0^\infty s^*(x) dx - \int_0^\infty F^*(-x) dx \\ &= \int_0^\infty g[S(x)] dx - \int_0^\infty g[F(-x)] dx \\ &= \int_0^\infty g[S(x)] dx - \int_0^\infty \{1 - g[S(-x)]\} dx = \rho_g[X] \end{aligned}$$

Dado que $F_X(x)$ representa la función de distribución de X , una variable aleatoria no negativa, entonces,

$$\rho_g(X) = \int_{-\infty}^0 (1 - g(1 - F(x))) dx + \int_0^{\infty} g(1 - F(x)) dx \quad (2)$$

es una medida de riesgo distorsionada.

$F_X(x)$ denota la función de distribución acumulativa de X , mientras que $g(F_X(x))$ se conoce como una función de distribución distorsionada. Esta medida de riesgo puede ser interpretada como el valor esperado de una variable aleatoria X derivada de una probabilidad distorsionada.

De igual forma podemos expresar esta medida de riesgo representada por la función de supervivencia $S_X(x) = 1 - F_X(x)$, en lugar de la función de distribución,

$$\rho_g(X) = \int_{-\infty}^0 (1 - g(S_X(x))) dx + \int_0^{\infty} g(S_X(x)) dx \quad (3)$$

Y para la distribución de la pérdida/beneficio, asumiendo que la variable pérdida es no negativa, entonces

$$\rho_g = \int_0^{\infty} g(S_X(X)) dx = \int_0^1 S^{-1}(1 - q) dg(q) \quad (4)$$

donde g es la distorsión definida por $g(u) = 1 - g(1 - u)$, $0 \leq u \leq 1$.

Wang (1999), señala que al igual que las funciones de utilidad, las funciones de distorsión que utilizamos son crecientes y cóncavas; Sin embargo, las funciones de distorsión modifican la probabilidad y mantienen la función de la riqueza sin cambios, mientras que las funciones de utilidad modifican la riqueza y mantienen la probabilidad intacta. Como $g(S_X(x))$ es una función creciente de $S_X(x)$, donde $S(x)$ es una función decreciente de x , por lo tanto $g(S_X(x))$ es también una función decreciente de x y puede ser explicada como la función de supervivencia del riesgo ajustado.

La función de distorsión añade en cierta forma las expectativas y la aversión al riesgo de los individuos, dado que esta repondera las probabilidades iniciales que establece la función real de las pérdidas y además, en este caso la función distorsionada posee una cola más pesada. Es evidente que el principal objetivo de la función distorsionada

consiste en dar más peso a los eventos con mayor pérdida y reducirlo en aquellos cuya pérdida es menor. Así, un individuo averso al riesgo al aplicar una distorsión a las probabilidades de la función de distribución de la variable pérdida estaría sobrevalorando el valor esperado de una pérdida futura.

3.2 Propiedades de las Medidas de Riesgos basadas en funciones de Distorsión

Las propiedades de las medidas de riesgos basadas en funciones de distorsión se derivan de los resultados expuestos sobre la Integral de Choquet respecto a una probabilidad distorsionada (véase Denneberg ,1994).

Monotonía: Si $X \leq Y$ entonces $\rho_g(X) \leq \rho_g(Y)$.

Homogénea Positiva: $\rho_g(\lambda X) = \lambda \rho_g(X)$ para todo $\lambda \geq 0$.

Invariante por traslación: $\rho_g(X + c) = \rho_g(X) + c$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

Aditiva comonótona: Si X y Y son dos riesgos comonótonos, es decir, si existe una variable aleatoria Z y dos funciones reales g, f no decrecientes, de forma que: $X = f(Z), Y = g(Z)$, entonces

$$\rho_g(X + Y) = \rho_g(X) + \rho_g(Y)$$

Subaditiva para g cóncava: Si la función de distorsión $g(x)$ es cóncava, entonces,

$$\rho_g(X + Y) \leq \rho_g(X) + \rho_g(Y).$$

Wirsch_Hardy (1999), demuestran que si g es cóncava la medida de riesgo distorsionada, $E_g[X]$ es una medida de riesgo coherente.

Superaditiva para g convexa: Si la función de distorsión $g(x)$ es convexa, entonces

$$\rho_g(X + Y) \geq \rho_g(X) + \rho_g(Y).$$

Una diferencia importante entre usar una función de distorsión cóncava o convexa es que la medida de riesgo resultante suele ser subaditiva o superaditiva (Balbas,2009).

Carga no negativa: $E[X] \leq \rho(X)$ para todo X , si y solo si, $g(u) \geq u$ para todo $u \in [0,1]$ (Wang (1997)). Una medida de riesgo debe estar acotada hacia abajo por el valor esperado de la pérdida.

Carga no excesiva: $\rho(X) \leq \max(X)$. Una medida de riesgo debe estar acotada superiormente por la pérdida máxima.

Para una función de distorsión no decreciente g , la medida de riesgo asociada ρ_g es consistente con el dominio estocástico de primer orden

$$X \leq_1 Y \Rightarrow \rho_g(X) < \rho_g(Y).$$

Para una función distorsionada cóncava no decreciente g , la medida de riesgo asociada ρ_g es consistente con el dominio estocástico de segundo orden

$$X \leq_2 Y \Rightarrow \rho_g(X) < \rho_g(Y).$$

Si $X = c$ para toda constante c entonces $\rho_g(X) = c$.

Asimetría: Dado una función de distorsión \tilde{g} definida por $\tilde{g}(x) = 1 - g(1 - x)$, $0 \leq x \leq 1$, y sea g una función de distorsión cualquiera, entonces,²

$$\rho_g(-X) = -\rho_{\tilde{g}}(X)$$

Completa: Sea X una variable aleatoria y ρ_g una medida de distorsión generada por $\rho_g(X) = E_{p^*}(X)$, se dice que ρ_g es una medida de riesgo distorsionada completa si:

$$\begin{aligned} \rho_g(-X) &= -\int_{-\infty}^0 (1 - g(S_{-X}(x))) dx + \int_0^{\infty} g(S_{-X}(x)) dx \\ &= -\int_{-\infty}^0 (1 - g(1 - S_X(x))) dx + \int_0^{\infty} g(S_X(x)) dx \\ &\quad - \int_{-\infty}^0 g^*(S_X(x)) dx + \int_0^{\infty} (1 - g(1 - S_X(x))) dx \\ &= -\rho_{\tilde{g}}(X). \end{aligned}$$

$$S(x_1) = S(x_2) \leftrightarrow S^*(x_1) = S^*(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in [0, \infty),$$

Donde S^* es la función de supervivencia distorsionada. Según Balbas (2009) las medidas completas de riesgo son fáciles de caracterizar. Solo es suficiente que la función de distorsión sea estrictamente creciente.

Adaptabilidad: Una medida de riesgo distorsionada es adaptada si:

g es estrictamente cóncava, esto es que g sea estrictamente decreciente.

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} g'(u) = \infty \text{ y } \lim_{u \rightarrow 1^-} g'(u) = 0.$$

La condición $g'(u) = \infty$ es necesaria para asegurar pesos relativos ilimitados para las pérdidas extremas en la cola derecha. Al tener la propiedad de adaptabilidad las medidas de riesgo basadas en funciones de distorsión reponderan ante las diferentes pérdidas de forma diferente, dando una probabilidad distorsionada menor a las pérdidas cercanas a 0 y una probabilidad mayor a las grandes pérdidas.

Las dos últimas propiedades fueron propuestas por Balbas (2009), basadas en el hecho de que la coherencia en las medidas de riesgos basadas en funciones de distorsión no es suficiente para evitar inconsistencia, dado que la función de distorsión que define algunas de estas medidas (como el VaR) son constantes y esto genera que se pierda información de la distribución inicial de la pérdida. Es por esto que se exponen las propiedades de completitud y adaptabilidad, ya que con estas nuevas propiedades se puede asegurar de que la función de distorsión no sólo utilice toda la información de la pérdida, sino que lo haga adecuadamente.

3.3 Funciones de Distorsión

A la hora de elegir una medida de riesgo distorsionada primero tenemos que definir cuál será la función de distorsión que aplicaremos, ya que de esta dependerán los futuros resultados a obtener. Por lo tanto, preferir una medida de riesgo distorsionada sobre otra o buscar cuáles son las mejores, depende fundamentalmente de una buena elección de la función de distorsión. Una forma para elegir una buena medida sería considerar si satisfacen las propiedades de concavidad, continuidad y diferenciabilidad (Sereda et al. 2005). Hoy en día, se han propuesto diferentes medidas basadas en funciones de distorsión en la literatura. En este trabajo presentaremos las más conocidas y aplicadas en el mundo financiero y actuarial.

Si $g(x) = x$, tenemos entonces que la medida de riesgo distorsionada $\rho_g(X) = E[X]$. Sereda et al. (2005), demostraron matemáticamente esta igualdad.

Limitando la prueba en el intervalo $[-b, b]$, en cuyo caso demuestran que existe con precisión la esperanza matemática.

$$\begin{aligned}
 \rho_g(X) &= \int_{-b}^0 (S_X(x) - 1) + \int_0^b S_X(x) dx \\
 &= \int_{-b}^0 F_X(x) dx + \int_0^b (1 - F_X(x)) dx \\
 &= b - \int_{-b}^b F_X(x) dx
 \end{aligned} \tag{5}$$

Integrando por parte, tenemos

$$\rho_g(X) = b - xF_X(x) \Big|_{-b}^b + \int_{-b}^b x dF_X(x) = E[X], \tag{6}$$

haciendo $F_X(b) = 1$, $F_X(-b) = 0$. En este caso en particular, la medida de riesgo distorsionada es aditiva.

3.3.1 VaR

Con un nivel de confianza α , la función de distorsión que define al VaR g_α se expresa como:

$$g_\alpha(S(x)) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq S(x) < 1 - \alpha \Leftrightarrow x > V_\alpha, \\ 1, & \text{si } 1 - \alpha \leq S(x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < V_\alpha. \end{cases} \tag{7}$$

Entonces la medida de riesgo es

$$\int_0^\infty g_\alpha(S(x)) dx = \int_0^{V_\alpha} dx = V_\alpha,$$

donde V_α es $F_X^{-1}(\alpha)$.

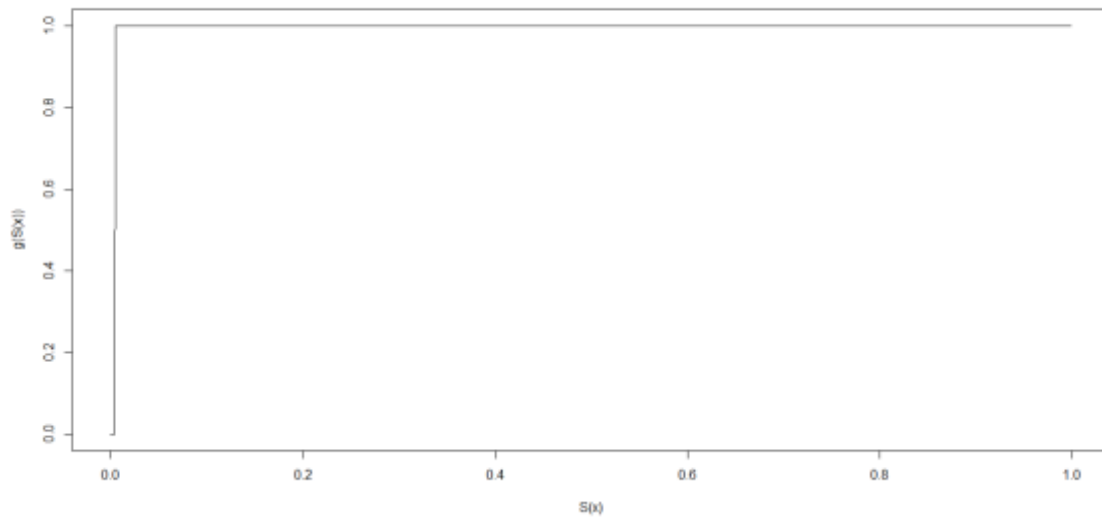


Figura 3.1 Función de distorsión para la medida de riesgo VaR

En la figura 3.1 podemos ver que la función de distorsión g_v del VaR es válida, con $g(0) = 0$, y $g(1) = 1$, la función es creciente, pero no cóncava. Por lo tanto, la medida de riesgo asociada con esta función de distorsión no es coherente y como resultado no representa una “buena” medida de riesgo distorsionada.

3.3.2 CVaR

El CVaR también se puede expresar en términos de una medida de riesgo de distorsión como sigue:

$$g_c(S(x)) = \begin{cases} \frac{S(x)}{1-\alpha}, & \text{si } 0 \leq S(x) < 1-\alpha \Leftrightarrow x > V_\alpha, \\ 1, & \text{si } 1-\alpha \leq S(x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < V_\alpha \end{cases} \quad (8)$$

A diferencia del VaR el CVaR utiliza tanto la frecuencia como la severidad del exceso de la pérdida esperada del VaR. Se puede comprobar igualmente que g es una función de distorsión no decreciente, continua y cóncava, por lo que su medida de riesgo distorsionada es coherente, lo que hace que la misma sea superior al VaR, sin embargo, esta no es diferenciable en $x = 1 - \alpha$, no utiliza toda la información de la distribución inicial, por lo tanto no toma en cuenta la gravedad de los valores extremos y solo representa el déficit previsto, Wang (2002). Además, este asigna un valor 0 a todos los percentiles por debajo del nivel de significación α .

Dado que estamos interesados en aplicar medidas de riesgos basadas en funciones de distorsión no lineales el VaR y CVaR solo han sido utilizados a modo de ejemplo.

3.3.3 Función Distorsionada PH (Proportional Hazard)

La función PH ha sido estudiada ampliamente por Wang (1996,1997) para su aplicación en la fijación de los precios de los riesgos ambiguos y carteras de riesgo, definiéndola de la siguiente forma:

Definición 3.3.3.1 Dado la mejor estimación de la distribución de pérdidas $S_X(x) - P_r\{X \geq x\}$, por algún índice exógeno r ($0 \leq r \leq 1$), la función PH se refiere a la asignación $S_Y(x) := [S_X(x)]^r$.

En cuanto a la medida de riesgo se refiere se define por el parámetro r como:

$$\rho_g(S(x)) = S(x)^{1/r} \text{ para } r \geq 1 \quad (9)$$

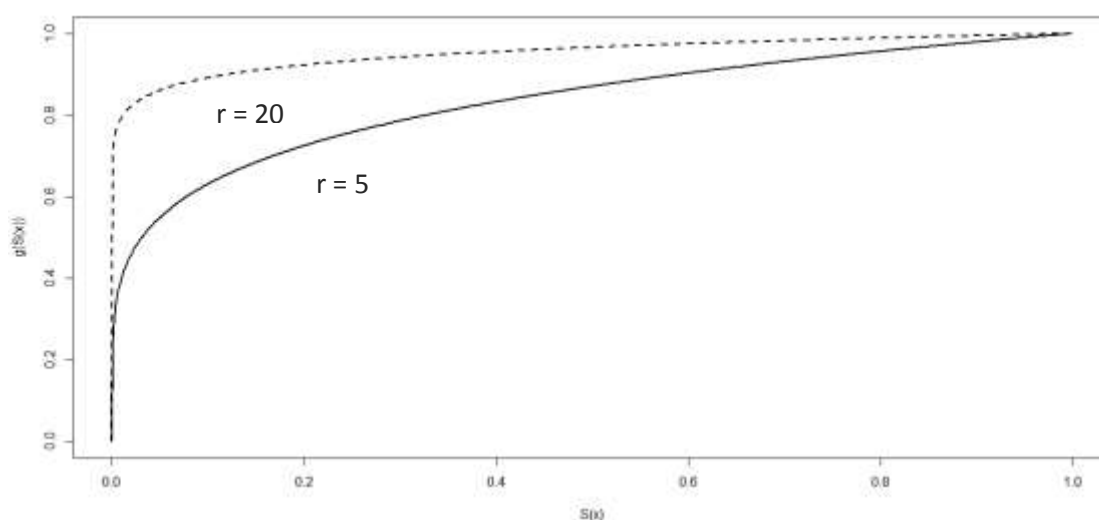


Figura 3.2 Función de distorsión para la medida de riesgo PH.

El parámetro r es una medida de aversión al riesgo, valores mayores en este parámetro ponen más peso en la cola derecha de la distribución de pérdidas. Esto resulta del gradiente más pronunciado para valores pequeños de $S_X(x)$, Hardy (1999). Por lo que un individuo averso al riesgo preferirá tener valores grandes de este parámetro a valores pequeños. La figura 3.2 muestra la función de distorsión PH para $r = 5$ y $r = 20$. Hay que tener cierto cuidado a la hora de asignar un valor al parámetro r , ya que utilizar valores muy “grandes” podría sobrestimar la pérdida.

3.3.4 Función de Distorsión DP (Dual-Power)

La función DP fue introducida por Wang (2000).

Considere la función distorsionada $g(S(x)) = 1 - (1 - S_X(x))^k, k \geq 1$, entonces tenemos:

$$\rho_g(x) = \int_0^\infty (1 - (F(x))^k) dx \quad (10)$$

Donde k es un entero, $\rho_g[X]$ puede ser interpretada como el valor esperado máximo de una muestra de observaciones $\{X_1, \dots, X_k\}$ independientes de la pérdida X . El objetivo del parámetro k es dar más pesos a los eventos mayores.

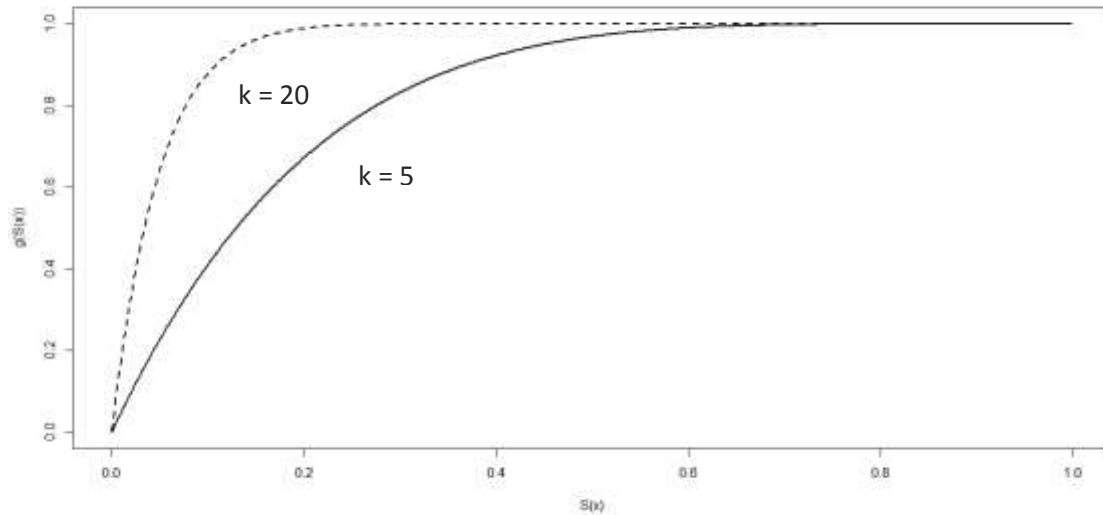


Figura 3.3 Función de distorsión para la medida de riesgo DP

La figura 3.3 muestra la función de distorsión para la transformación DP con $k = 20$ y $k = 5$. Se puede observar que mientras mayor es el valor del parámetro k más peso se le da a los valores extremos en la cola derecha.

3.3.5 Función de Distorsión Exponencial

La medida de riesgo basada en una función Exponencial no es más que la función de distribución acumulativa de una variable aleatoria exponencial restringida en el intervalo $[0, 1]$. La cual se expresa como:

$$\rho_g(x) = \frac{1 - e^x}{1 - e} \quad (11)$$

Donde e es un parámetro en el intervalo $[0, 1]$. Mientras más cercano a uno se sitúe este parámetro dará un mayor peso a los valores extremos de la variable pérdida. La función de distorsión Exponencial es siempre cóncava, por lo tanto, la medida del riesgo de distorsión es coherente.

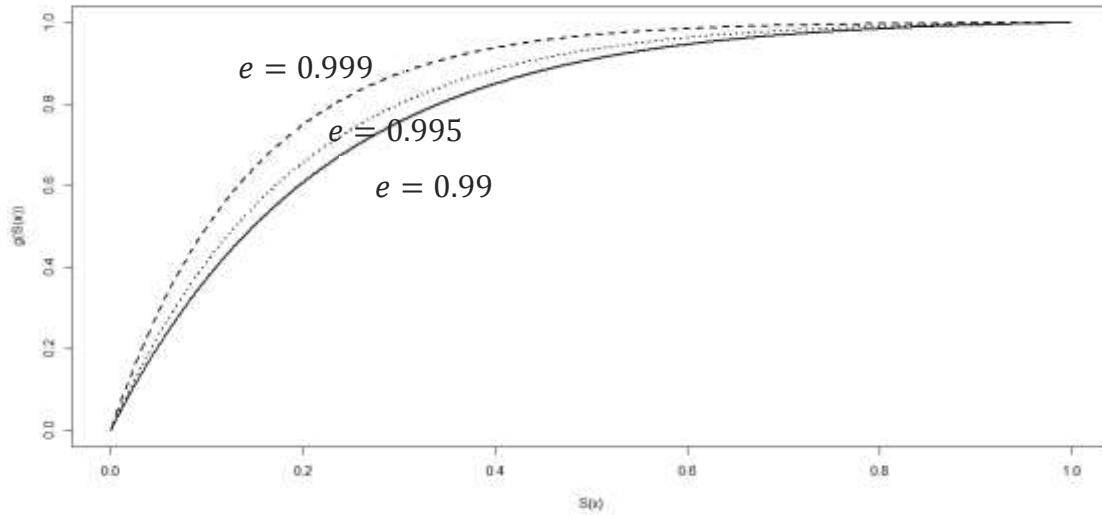


Figura 3.4 Función de distorsión para la medida de riesgo Exponencial

La figura 3.4 muestra que a pesar de asignarle al parámetro e valores cercanos a 1, este le da cierto peso a los valores en la cola derecha, pero no lo suficiente para acaparar todos los valores extremos que se encuentra en esta.

3.3.6 Función de Distorsión Cuadrática

La medida de riesgo distorsionada cuadrática fue propuesta por Sereda et al. (2010) aplicando la idea de la simetría estándar de las medidas de riesgo de distorsión para poner más pesos en la cola izquierda donde se sitúan las pérdidas que en la derecha donde están las ganancias, reflejando así el abanico de posibilidades del inversor. Por lo que introducen la simetría en la Integral de Choquet obteniendo la siguiente medida de riesgo:

$$\rho_{gi}(x) = - \int_{-\infty}^0 [1 - g_1(S_X(x))] dx + \int_0^{\infty} g_2(S_X(x)) dx, \quad (12)$$

donde la g_1 y g_2 difieren de acuerdo al parámetro de aversión al riesgo que se elija. Entonces,

$$g_i(x) = x + q(x - x^2), \quad (13)$$

es la medida de riesgo distorsionada, Sereda et al (2010).

Donde $q_i \in (0,1]$ es un parámetro de aversión al riesgo. Mientras más cerca de uno se encuentre este parámetro más averso al riesgo es el inversor. Además, sus exponentes señalan que esta medida de riesgo distorsionada cumple con todas las condiciones de una buena función de distorsión: es diferenciable, continua y estrictamente cóncava cuando $q_i \in (0,1]$. Asimismo cuando $q = 0$ la función de distorsión es igual a la esperanza matemática. La función de distorsión cuadrática se muestra en la figura 3.5 para $q = 0$, $q = 0.90$ y $q = 0.999$.

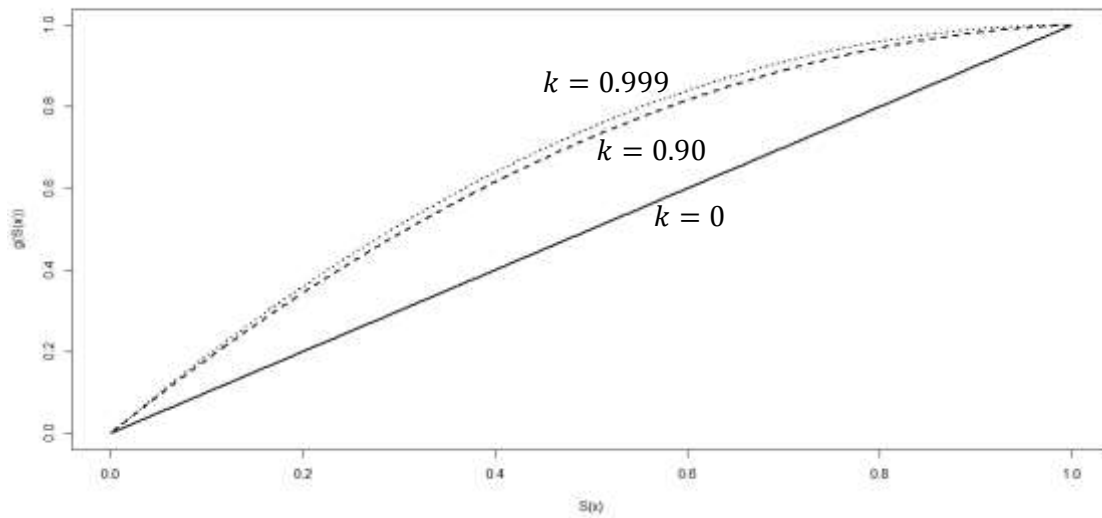


Figura 3.5 Función de distorsión para la medida de riesgo Cuadrática

3.3.7 Función de Distorsión de Potencia (Power Function)

La medida de riesgo distorsionada basada en la función potencia fue introducida también por Sereda et al (2010), dado que la función de Potencia es usada ampliamente en la teoría económica y la misma cumple ciertas características que la hacen deseable para proponer medidas de riesgo de distorsión asimétrica.

La medida de riesgo distorsionada asimétrica de Potencia tiene la siguiente forma:

$$\rho_{gi}(x) = - \int_{-\infty}^0 [1 - g_1(S_X(x))] dx + \int_0^{\infty} g_2(S_X(x)) dx, \quad (14)$$

donde la g_1 y g_2 difieren de acuerdo al parámetro de aversión al riesgo. Por lo que,

$$g = x^v, v \in (0,1), \quad (15)$$

es la función distorsionada de Potencia. El parámetro v hace referencia a la aversión al riesgo por parte de un inversor. Lo que nos dice que una mayor aversión al riesgo por parte de un inversor coloca menos pesos en las pérdidas menores y más en las pérdidas mayores. En la figura 3.6 se observa la función de distorsión de Potencia para $v = 90$, $v = 0.95$ y $v = 0.99$. A través de esta figura se puede determinar que a medida que aumenta la aversión al riesgo por parte de un inversor se tiende a dar más peso a los valores extremos situados en la cola derecha de la distribución.

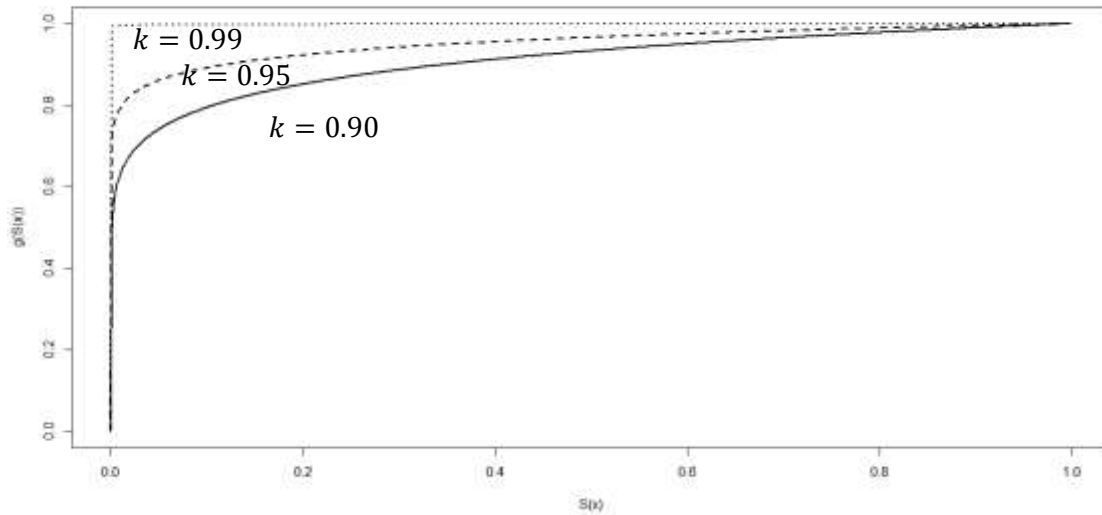


Figura 3.6 Función de distorsión para la medida de riesgo Potencia

3.3.8 Función de Distorsión de Gini

La medida de riesgo basada en la función distorsionada de Gini tiene su origen del principio de Gini. Cuya medida de riesgo se expresa como:

$$\rho_g(x) = \int_0^{\infty} ((1 + p)S_X(x) - p(S_X(x))^2) dx \quad (16)$$

Y la función de distorsión viene dada por:

$$g(x) = (1 + p)x - px^2 \quad (17)$$

La función de distorsión transformación de Gini se presenta en la figura 3.7 para $p = 0.90$, $p = 0.95$ y $p = 0.99$. Se puede observar que la función de distorsión de Gini a pesar de tener parámetros cercanos a uno no da un peso importante a los valores extremos en la cola derecha de la distribución de la pérdida.

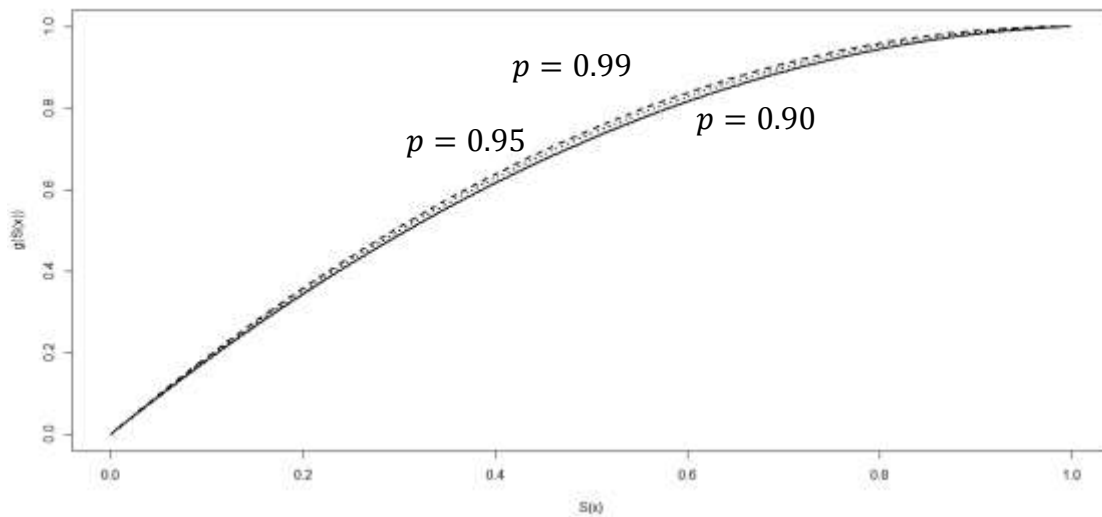


Figura 3.7 Función de distorsión para la medida de riesgo de Gini

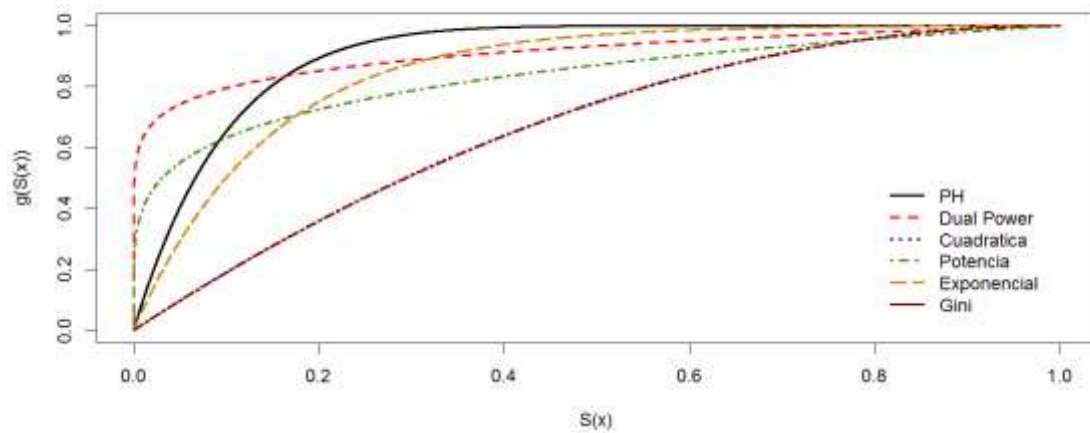


Figura 3.8 Comparación de las diferentes funciones de distorsión

La figura 3.8 muestra una comparación de las diferentes funciones distorsionadas. Cabe señalar que cada una de estas funciones utiliza un parámetro de aversión al riesgo diferente, y difieren según la estructura de cada función.

4 Estimación no paramétrica de la función de supervivencia

En la mayoría de los trabajos y aplicaciones de la gestión de riesgo se asume una distribución paramétrica para la variable aleatoria de pérdida, en este trabajo sustituimos este supuesto por el distintas estimaciones no paramétricas, que permiten que sea la misma información muestral que nos dibuje la función de supervivencia. Como nuestro interés reside en calcular las medidas de riesgo basadas en funciones distorsionadas, ciertos supuestos acerca del comportamiento estocástico de la pérdida, por lo que en nuestro caso estimaremos primero la función de distribución acumulada (fda), sin asumir ningún supuesto distribucional y, a través de la estimación de la fda, obtendremos la función de supervivencia para calcular las medidas de riesgos distorsionadas.

Uno de los estimadores no paramétricos más sencillo y simple de la fda es la distribución empírica, la cual se puede utilizar con un tamaño mínimo de la muestra y cuando n es grande converge al verdadero valor de la fda teórica. Aunque se sabe que esta es un estimador insesgado de la fda, es ineficiente cuando la muestra es pequeña. Como una alternativa no paramétrica está el estimador núcleo clásico (CKE-Classical Kernel Estimator) de la fda. El método núcleo clásico utiliza un conjunto de datos que proceden de una distribución continua y aproxima su función de distribución acumulada. Este método permite suavizar la forma de la distribución empírica y extrapola su comportamiento. No obstante, en la mayoría de los casos los valores extremos a la derecha de la cola son muy escasos lo que impide que el CKE pueda suavizar la forma de la distribución empírica y a su vez extrapolar su comportamiento. Bolancé et al. (2015), analizaron las propiedades del estimador núcleo transformado que se basa en una transformación de los datos originales para que los datos transformados sigan una distribución con la que pueda estimarse la fda con el CKE y extrapolar la forma de la cola derecha. A través de este método propusieron el estimador núcleo doble transformado (DTKE- Double Transformed Kernel Estimator) que consiste en una transformación inicial de los datos hasta conseguir una variable transformada con una distribución cercana a una uniforme $(0, 1)$, después, los datos se transforman nuevamente utilizando la inversa de una función de distribución *Beta* $(3,3)$.

La ventaja del DKTE es que permite extrapolar el cuantil de la distribución de la pérdida por encima del máximo valor observado de una forma más eficiente y mejorando la estimación del mismo.

Una de las desventajas que presentan los métodos basados en la estimación núcleo antes mencionados es que son estimadores sesgados de la fda. Por lo que Kim et al. (2006), proponen una técnica reductora del sesgo para el CKE (BCCKE, Bias Correction

Classical Kernel Estimator). Más adelante, Bolancé et al. (2015), combinan esta técnica reductora de sesgo con el DTKE y obtienen el estimador núcleo doble transformado con técnica reductora de sesgo (BCDTKE- Bias Corretion Double Trasformed Kernel Estimator).

El objetivo de utilizar estos métodos no paramétricos es que se basan en la falta de información sobre la distribución teórica asociada a la variable aleatoria bajo análisis.

4.1 Distribución Empírica

Uno de los métodos no paramétricos más sencillos para estimar la fda es la distribución empírica.

Sea X_1, \dots, X_n una muestra de observaciones independientes e igualmente distribuidas. Para estimar cada una de las medidas de riesgos basadas en funciones de distorsión se sustituirá la $1 - F_X = S_X$ por la distribución empírica:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x), \quad (18)$$

donde $I(\cdot)$ es una función indicatriz que toma valores 1 o 0. Se puede considerar a $\hat{F}_n(X)$ como una función de distribución discreta que asigna una probabilidad de $1/n$ a cada uno de los n valores de la variable.

La distribución empírica no tiene sesgo y su varianza es:

$$\frac{(F_X(X)[1 - F_X(X)])}{n}.$$

A pesar de que la distribución empírica es un estimador insesgado de la fda no puede extrapolarse más allá del último valor observado, es decir, el máximo muestral. Esto es realmente problemático ya que no se contempla una pérdida mayor que la máxima observa en la muestra y se puede sospechar la probabilidad de que esta ocurra.

4.2 Estimador Núcleo Clásico (CKE)

El CKE de la fda se obtiene mediante la integración de su función de densidad de probabilidad (fdp), que se define como:

$$\hat{f}_X(x) = \frac{1}{nb} \sum_{i=1}^n k\left(\frac{x - X_i}{b}\right) \quad (20)$$

donde k es una función de densidad de probabilidad. El CKE es un promedio de valores de una función de densidad simétrica de modo que estos serán mayores cuanto más cerca este la observación muestral del punto x . La suma ponderada de estos n valores de densidades será también una densidad. La misma será una función continua que suaviza la forma de la distribución captando la influencia de los datos cercanos a cada punto x .

Al parámetro b se le denomina ancho de la banda, ventana o parámetro de alisamiento y su elección influye considerablemente en la estimación de la fda. Mientras más pequeño sea b menos alisada será la función estimada. En este trabajo utilizamos el valor del parámetro de alisamiento propuesto por Alemany et al. (2013) para el estimador CKE:

$$b = \sigma^{\frac{5}{3}} \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}},$$

donde σ se sustituye por la desviación típica estimada a partir de la muestra observada o, dado que la distribución de la pérdida presenta colas pesadas, una forma más eficiente de estimar el parámetro de suavizado o ancho de la banda es utilizando una estimación robusta de σ basado en el rango intercuartílico (véase Silverman, 1986).

La forma habitual del CKE de la fda es:

$$\hat{F}_x(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{b}\right). \quad (21)$$

Existen diferentes funciones núcleo como puede observarse en la figura 1, pero entre las más utilizadas está el núcleo Gaussiano y el Epanechnikov. En nuestro caso utilizamos el núcleo de Epanechnikov ya que es uno de los más estudiados y su función consiste en una parábola que se coloca encima de cada punto.

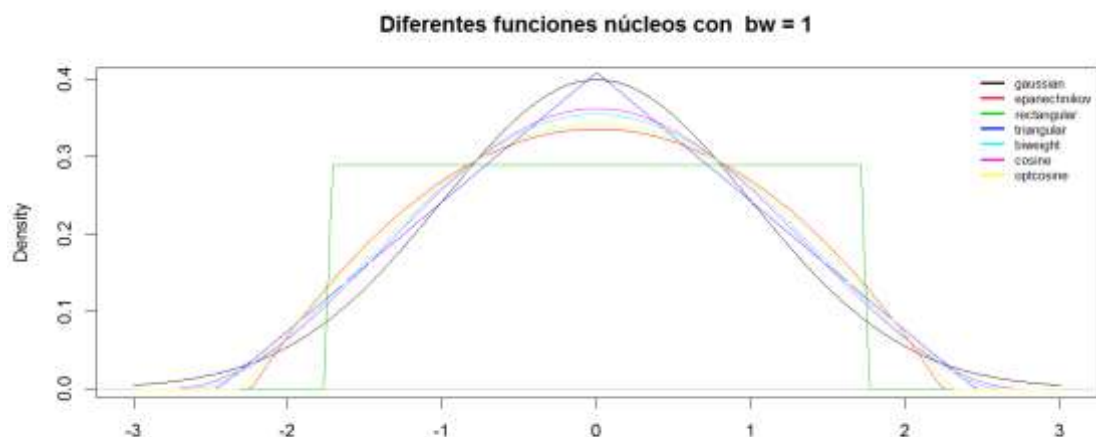


Figura 4 2.1 Diferentes funciones núcleo con $b = 1$

La función núcleo de Epanechnikov se define de la siguiente forma:

$$K(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2), \quad x \in [-1, 1] \quad (22)$$

El estimador núcleo clásico no es muy diferente a la distribución empírica. Para obtener el primero solo se tendría que remplazar $I(X_i \leq x)$ por $K\left(\frac{x - X_i}{b}\right)$. La principal diferencia entre estos dos estimadores de la fda es que la distribución empírica solo utiliza los datos por debajo de x y el Clásico clásico utiliza los datos tanto por encima como por debajo de x para estimar la fda.

4.3 Estimador Núcleo Doble Transformado (DTKE)

El DTKE requiere dos transformaciones de los datos, una inicial que tal y como proponen Alemany et al. (2013) coincide con la fda propuesta por Champernowne, porque es sencilla de aplicar y produce buenos resultados. La segunda transformación coincide con la inversa de la función de distribución de una $Beta(3,3)$. El objetivo es que la muestra transformada se distribuya como dicha $Beta(3,3)$, dado que esta distribución se estima de forma óptima utilizando el CKE. Es decir, este método se basa en el concepto de simulación estocástica.

La distribución de Champernowne converge a una distribución de Pareto en la cola. Una de las desventajas que presenta esta distribución es su forma inflexible cerca de 0. Para resolver este inconveniente Buch-Larsen et al. (2005) propusieron modificar la Champernowne con un parámetro adicional.

La distribución de Champernowne modificada con un nuevo parámetro c asegura la posibilidad de un valor positivo finito de la densidad en 0.

Definición 4.3.1. La fda de la Champernowne modificada está definida para $x \geq 0$ y se expresa como:

$$T_{\alpha,M,c}(x) = \frac{(x+c)^2 - c^\alpha}{(x+c)^\alpha + (M+c)^\alpha - 2c^\alpha} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad (23)$$

con parámetros $\alpha > 0$, $M > 0$ y $c \geq 0$ y función de densidad:

$$t_{\alpha,M,c}(x) = \frac{\alpha(x+c)^{\alpha-1}((M+c)^\alpha - c^\alpha)}{((x+c)^\alpha + (M+c)^\alpha - 2c^\alpha)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad (24)$$

La Champernowne modificada también converge a una Pareto en la cola.

Buch-Larsen et al. (2005) propusieron un método para estimar los tres parámetros de la distribución de Champernowne modificada. Dado que se cumple $T_{\alpha,M,c}(M) = 0.5$, M puede estimarse como la mediana del conjunto de datos empíricos. Se prefiere la mediana antes que la media ya que este es un estimador más robusto, especialmente cuando se trabaja con datos de colas pesadas. Los otros dos parámetros c y α se estiman maximizando la función de verosimilitud condicionada al valor de M .

Según Alemany et al. (2013) el DTKE equivale a:

$$\hat{F}_{M^{-1}(T(X))}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{M^{-1}(T(x)) - M^{-1}(T(X_i))}{b}\right), \quad (25)$$

donde $T(\cdot) = T_{\alpha,M,c}(\cdot)$ y

$$M(x) = \frac{3}{16}x^5 - \frac{5}{8}x^3 + \frac{15}{16}x + \frac{1}{2}.$$

Siendo el valor del parámetro de alisamiento igual a:

$$b = 3^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}} \quad (26)$$

Una de las mayores ventajas del DTKE es que permite extrapolar los cuantiles de la distribución de la variable pérdida por encima del máximo valor observado de una forma simple y eficiente.

4.4 Estimador Núcleo Clásico con técnica Reductora de Sesgo (BCCKE)

El BCCKE propuesto por Kim et al (2006), parte de una combinación lineal del CKE de la fdp y del CKE de la fda. La expresión en (20) representa el CKE de la fdp y (21) ilustra el CKE de la fda.

El BCCKE se expresa como:

$$\tilde{F}_X(x) = \frac{\lambda_1 \hat{F}_1(x) + \hat{F}_X(x) + \lambda_2 \hat{F}_2(x)}{\lambda_1 + 1 + \lambda_2}, \quad (27)$$

donde

$$\hat{F}_j(x) = \hat{F}_X(x + l_j b) - l_j b \hat{f}_X(x + l_j b), \quad j = 1, 2,$$

y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ son pesos.

Kim et al. (2006), probaron que si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ entonces $-l_1 = l_2 = l(\lambda)$, siendo:

$$l(\lambda) = \left(\frac{(1 + 2\lambda)\mu_2}{2\lambda} \right)^{1/2}$$

cuando $\mu_p = \int t^p k(t) dt$.

El valor del parámetro de alisamiento utilizado para obtener el BCCKE es:

$$b^* = n^{-1/7} \sigma \left(\frac{-V(\lambda)}{\frac{0.5289277}{72} \left(\mu_4 - \frac{3(1 + 6\lambda)\mu_2^2}{2\lambda} \right)^2} \right)^{1/7} \quad (28)$$

siendo $\lambda = 0.0799$ y $V(0.0799) = -0.1472244$, (véase Bolancé et al., 2015).

4. 5 Estimador Núcleo Doble Transformado con técnica Reductora de Sesgo (BCDTKE)

El BCDTKE propuesto por Bolancé et al. (2015) consiste en aplicar la corrección de sesgo al DTKE, el resultado incorporando las propiedades óptimas de ambos estimadores: el DTKE y el BCCKE, lo que se traduce en una, mayor eficiencia y menor sesgo. El estimador se basa en el hecho de que la distribución $Beta(5,5)$ es la que se estima de forma óptima con el BCCKE. Al igual que el DTKE, que consistía en aplicar el CKE a los datos doble transformados, el BCDTKE consiste en aplicar el BCCKE a los datos doblemente transformados, que en este caso se distribuyen como una $Beta(5,5)$.

El valor del parámetro de alisamiento utilizado es:

$$b^* = n^{-1/7} \left(\frac{-V(\lambda)}{\frac{1288.6}{72} \left(\mu_4 - \frac{3(1+6\lambda)\mu_2^2}{2\lambda} \right)^2} \right)^{1/7} \quad (29)$$

Donde $V(\lambda)$ y λ coinciden con las definidas para el BCCKE (véase Bolance et al., 2015).

5 Aplicación de las medidas de riesgos basadas en funciones de distorsión

5.1 Descripción y análisis de los datos

En este apartado aplicaremos las diferentes medidas de riesgos basadas en funciones de distorsión conjuntamente con los diferentes métodos no paramétricos de estimación de la función de supervivencia a un conjunto de datos de una compañía de seguros.

El conjunto de datos analizados contiene una muestra con 5,122 costes de reclamaciones por accidentes de tráfico de automóviles de una compañía de seguros española en 1997. Se eligió este conjunto de datos ya que las observaciones hacen referencia al costo de reclamaciones de accidentes, es decir, es una muestra ideal para el estudio, dado que presenta valores muy pequeños, así como también, muy extremos.

Para enriquecer el estudio y hacer una mejor comparación de los métodos utilizados, el conjunto de datos originales se dividió en dos grupos: el primero corresponde a los asegurados que tenían menos de 30 años en el momento que se produjo el accidente, y el segundo grupo pertenece a las reclamaciones de los asegurados que tenían más de 30 años cuando se provocó el accidente.

El primer grupo está compuesto por 1.061 observaciones cuyo coste por las indemnizaciones está comprendido en un intervalo de 1 a 126,000 unidades monetarias. El segundo grupo contiene 4,061 observaciones dentro de un intervalo de 1 a 17,000 unidades monetarias.

Tabla 5.1 Resumen estadístico del coste de las reclamaciones de los conductores menores de 30 y mayores de 30

Datos	Nº de observaciones	Mediana	Media	Desviación Estándar
Mayores de 30	4,061	68	243,1	704,62
Menores de 30	1,061	66	402,7	3952,26
Todos los datos	5,122	67	276,1	1905,54

El costo de las reclamaciones se expresa en unidades monetarias

En la tabla 5.1 se presenta un resumen estadístico del conjunto de datos donde, se puede observar que la desviación estándar del coste de las reclamaciones del grupo de los

conductores menores de 30 es mucho mayor que la del grupo de los conductores mayores de 30, presentando así el primer grupo una mayor variabilidad en los datos que el segundo. De igual forma sucede con la media de ambos grupos. Estas diferencias van dando indicios del comportamiento de los dos grupos y el posible precio que ha de cobrarse para contratar un seguro de automóvil a cada uno. No obstante, uno de los objetivos de aplicar las medidas de riesgos basadas en funciones de distorsión es dar un mayor peso a los valores extremos del coste de las reclamaciones y así poder discriminar que grupo resulta más arriesgado que otro y que precio ha de fijarse para evitar incurrir en grandes pérdidas económicas.

5.2 Resultados

A continuación se presentan los resultados de aplicar las medidas de riesgos basadas en funciones de distorsión a los grupos de asegurados menores y mayores de 30 años. Para obtener los resultados se estimaron las medidas de riesgo basadas en funciones distorsionadas: PH, DP, Cuadrática, Exponencial, Potencia y de Gini. Se establecieron diferentes valores para el parámetro de aversión al riesgo de cada función de distorsión con el objetivo de observar cómo se comporta el riesgo en ambos grupos a medida que aumenta o disminuye el valor de este parámetro. Además, aplicar las distintas medidas de riesgo distorsionada a ambos grupos permite determinar cuál es más arriesgado y, a su vez, que medida de riesgo distorsionada resulta más eficiente para diferenciar el riesgo. De igual forma se aplicaron los métodos no paramétricos para estimar la $S_X(x)$: i) la distribución empírica, como se expresa en (18); ii) estimador núcleo clásico de la fda (CKE) como se describe en el capítulo 4.2; iii) estimador núcleo doble transformado (DTKE) como se describe en 4.3; iv) estimador kernel clásico con técnica reductora de sesgo como se detalla en el capítulo 4.4 y v) estimador kernel clásico con técnica reductora de sesgo descrito en el capítulo 4.5

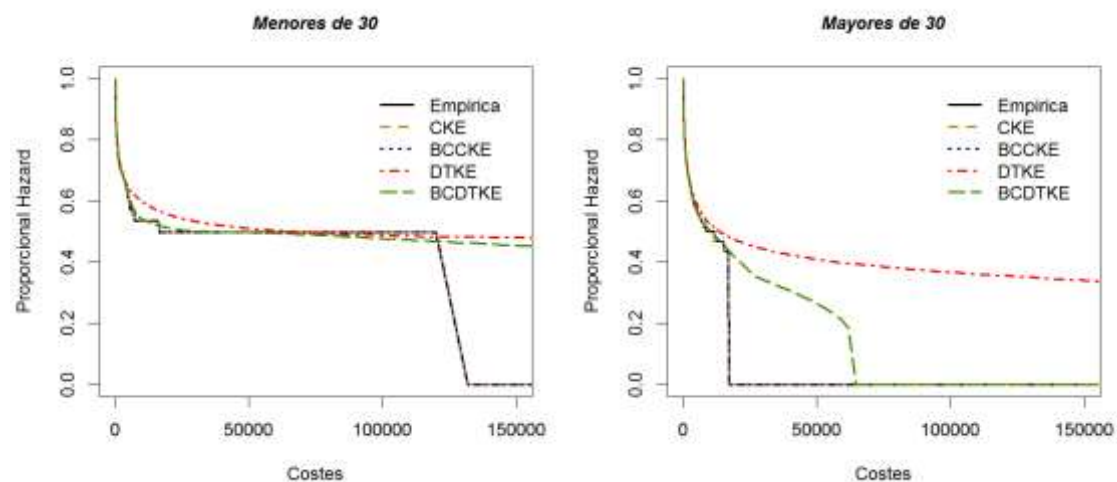


Figura 5.1 Medida de riesgo distorsionada PH por los métodos de estimación de la $S_X(x)$

Los resultados de la medida de riesgo distorsionada PH para ambos grupos de asegurados con $r = 5$ y $r = 10$ con los distintos métodos de la estimación de la $S_X(x)$ se presentan en la tabla 1.1 del apéndice. Los resultados de la figura 5.1 se han determinado con $r = 10$. Como se observa en la figura 5.1 la medida de riesgo basada en la función de distorsión PH tiene como objetivo dar un mayor peso a los valores extremos de la distribución de la pérdida. La estimación de la medida de riesgo distorsionada PH produce diferentes valores de acuerdo a los diferentes métodos de estimación de la $S_X(x)$ y al grupo al que se ha aplicado. En el caso de la Empírica, CKE y BCKKE los resultados son muy similares para ambos grupos, esto se debe a que estos métodos no suelen ser eficientes en presencia de colas pesadas, y por lo tanto, tienden a subestimar el riesgo. En el caso de los conductores menores de 30 años el DTKE mejora la estimación de la Empírica y CKE, sin embargo, al ser una muestra pequeña este método sobrestima el riesgo a diferencia del grupo de mayores de 30 cuya muestra es más grande y por lo tanto su estimación es más eficiente. El BCDTKE en ambos grupos cumple con el objetivo de reducir el sesgo y la varianza del CKE. Este método suele funcionar muy bien con colas pesadas.

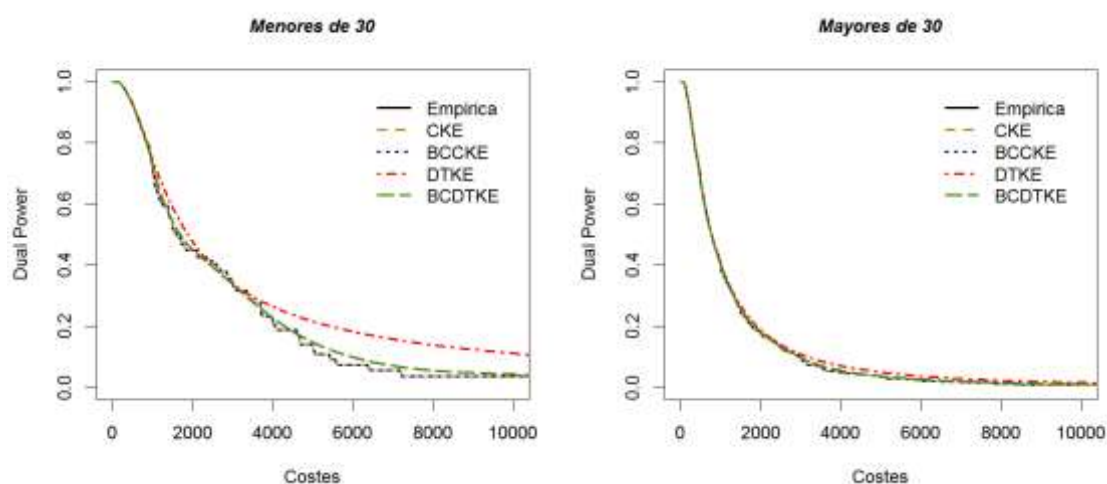


Figura 5.2 Medida de riesgo distorsionada DP por los distintos métodos de estimación de la $S_X(x)$

La medida de riesgo basada en la función de distorsión DP tiene como objetivo distorsionar las probabilidades iniciales para a través de la función de distorsión dar más peso a los eventos poco probables. Los resultados de esta medida de riesgo para $k = 5$ y $k = 10$ se presentan en la tabla 1.2 del apéndice. Esta función logra distorsionar las probabilidades iniciales y darle un poco más de peso a los eventos con una probabilidad baja, sin embargo, dado la estructura de la expresión (10) y que el parámetro $k = 10$ se fija según la distribución de la variable pérdida no se logra reponderar las probabilidades a niveles más altos, y por tanto, no se consigue una cola mucho más pesada. En este caso, la cola derecha de la distribución de la pérdida es más alisada que al utilizar la función de distorsión PH como se muestra en la figura 5.2.

Al tener una cola más liviana y una muestra pequeña en el caso de los conductores menores de 30, la estimación de la Empírica, CKE y BCKE produce una estimación muy similar de la medida de riesgo basada en la distorsión DP, en el caso del DTKE aumenta un poco el sesgo con respecto a la empírica sobrestimando así el riesgo. El mejor resultado se obtiene con el BCDTKE que reduce tanto el sesgo como la varianza de la estimación de la medida de riesgo y alisa la forma del CKE.

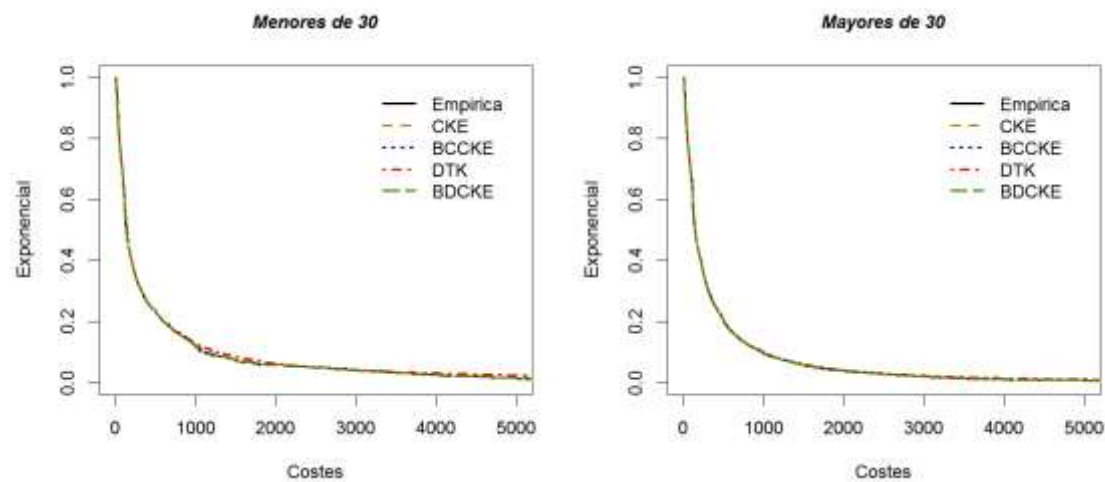


Figura 5.3 Medida de riesgo distorsionada de Gini por métodos de estimación de la $S_X(x)$.

La medida de riesgo basa en la función distorsionada de Gini al reponderar las probabilidades iniciales da muy poco peso a los eventos poco probables y como consecuencia se obtiene una cola parecida a la de la distribución inicial. Los resultados para $p = 0.99$, $p = 0.995$ y $p = 0.999$ se presentan en la tabla 1.3 del apéndice.

En este caso se puede observar que dado diferentes parámetros de aversión al riesgo y métodos de estimación de la fda se produce una estimación parecida de la medida de riesgo para ambos grupos como se muestra en la figura 5.3. Para los conductores menores de 30 el método que produce mejores resultados para estimar la medida de riesgo basa en la función de distorsión de Gini es el BCDTKE que alisa la forma del CKE. Para los conductores mayores de 30 a estos tener una cola más lisa el método que produce mejores resultados es el CKE.

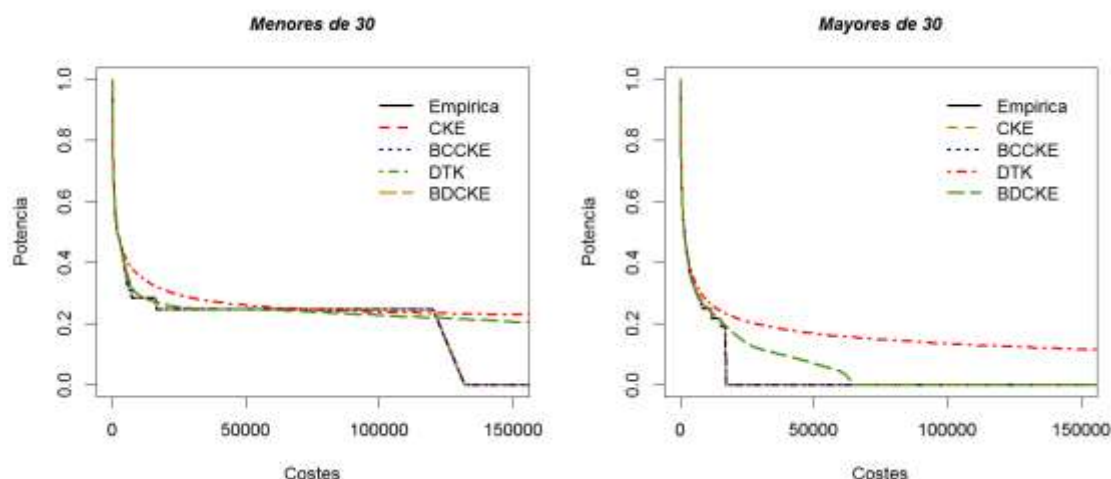


Figura 5.4 Medida de riesgo distorsionada de Potencia por métodos de estimación de la $S_X(X)$.

Los resultados de la estimación de la medida de riesgo basada en la función de distorsión de Potencia para $\nu = 0.20$ y $\nu = 0.10$ se presentan en la tabla 4 del apéndice. La estructura de la función de distorsión Potencia logra el objetivo de dar un mayor peso a las pérdidas con un mayor coste y de esta forma conseguir reponderar las probabilidades iniciales y obtener una cola más pesada como se muestra en la figura 5.4

Para ambos grupos de conductores el método Empírico, CKE y BCKE producen una estimación similar de la medida de riesgo. El primer grupo muestra una cola más pesada que el segundo como se observa en la figura 5.4, es por esto que el BCDTKE produce mejores resultados que los demás métodos, debido a que este método tiende a funcionar muy bien cuando la distribución de la pérdida presenta colas muy pesadas.

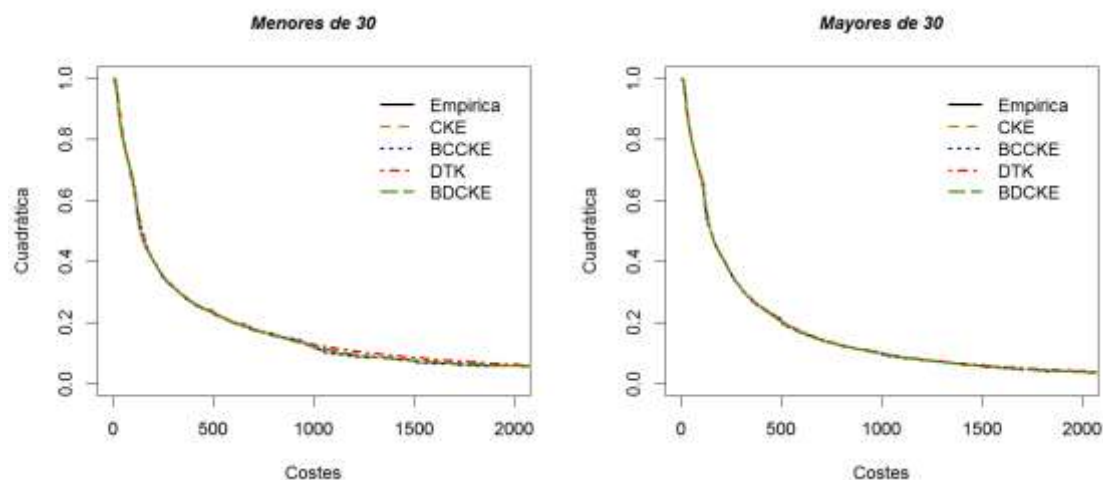


Figura 5.5 Medida de riesgo distorsionada Cuadrática por métodos de estimación de la $S_X(x)$.

La medida de riesgo basada en la función de distorsión Cuadrática no logra a través de la función de distorsión dar más pesos a los valores extremos de la distribución para que estos tengan una probabilidad mayor que la inicial. Aunque se calcule la medida de riesgo con distintos valores del parámetro de aversión al riesgo cercanos a uno los resultados son muy similares, como puede observarse en la tabla 1.5 del apéndice. Al tener una cola ligera la estimación que produce los distintos métodos de estimación de la $S_X(x)$ para estimar la medida de riesgo basada en la función Cuadrática es muy similar en ambos grupos. En este caso la medida de riesgo distorsionada basada en la función Cuadrática subestima el riesgo ya que produce resultados muy parecidos a los valores medios en ambos grupos.

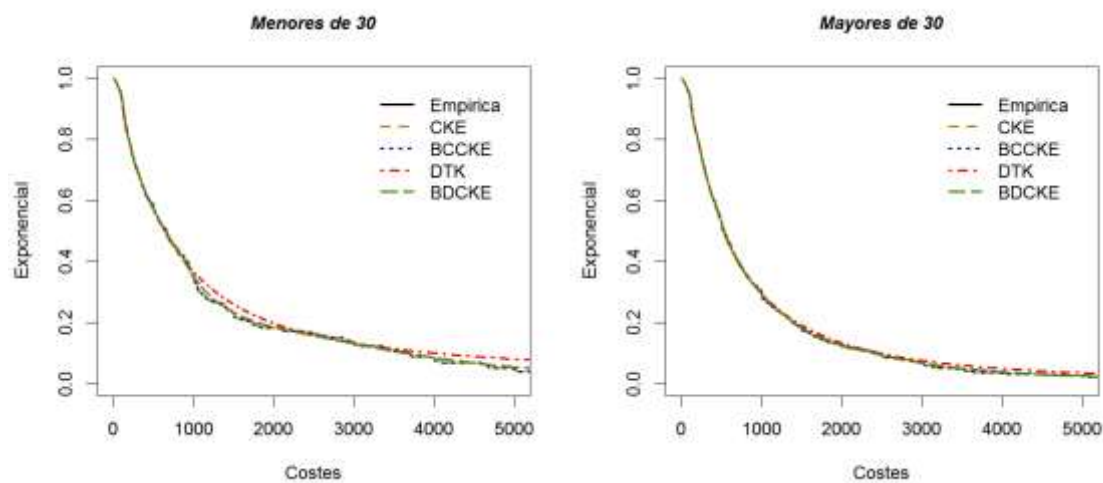
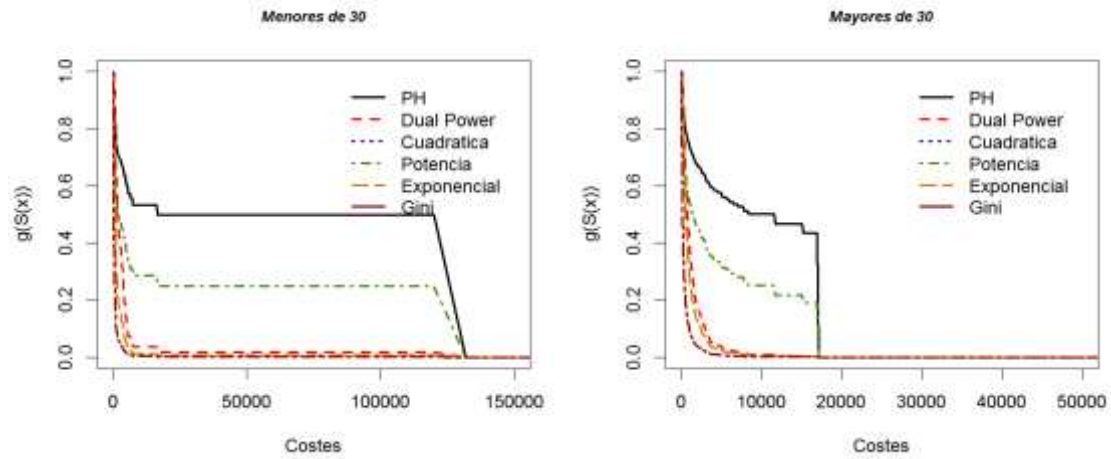


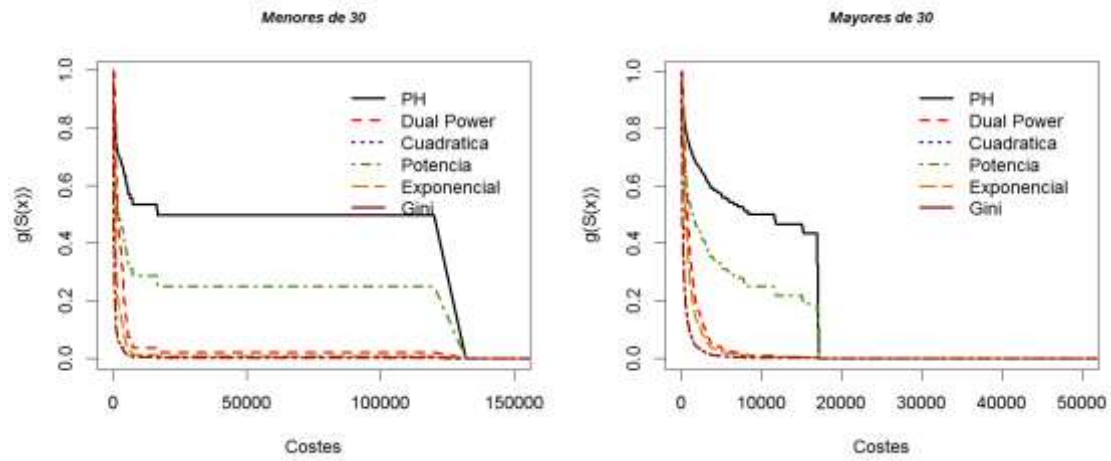
Figura 5.6 Medida de riesgo distorsionada Exponencial por métodos de estimación de la $S_X(x)$.

Los resultados para la medida de riesgo basada en la función de distorsión Exponencial para $e = 0.99$, $e = 0.995$ y $e = 0.999$ se presentan en la tabla 1.6 del apéndice. Se puede observar en la figura 5.6 que los resultados obtenidos para esta medida de riesgo son similares a los obtenidos con la medida de riesgo basada en la función de distorsión Cuadrática, es decir, al aplicar la función de distorsión de ambas medidas no se consigue reponderar las probabilidades iniciales para dar más peso a los valores extremos. Igualmente, esta medida de riesgo distorsionada subestima el riesgo ya que produce resultados muy parecidos a los valores medios de ambos grupos.

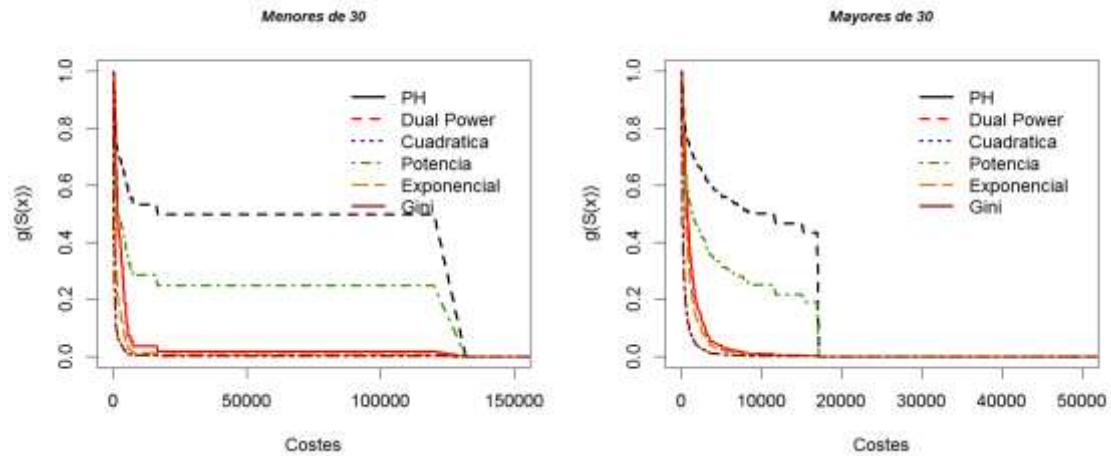
Empírica



CKE



BCDTKE



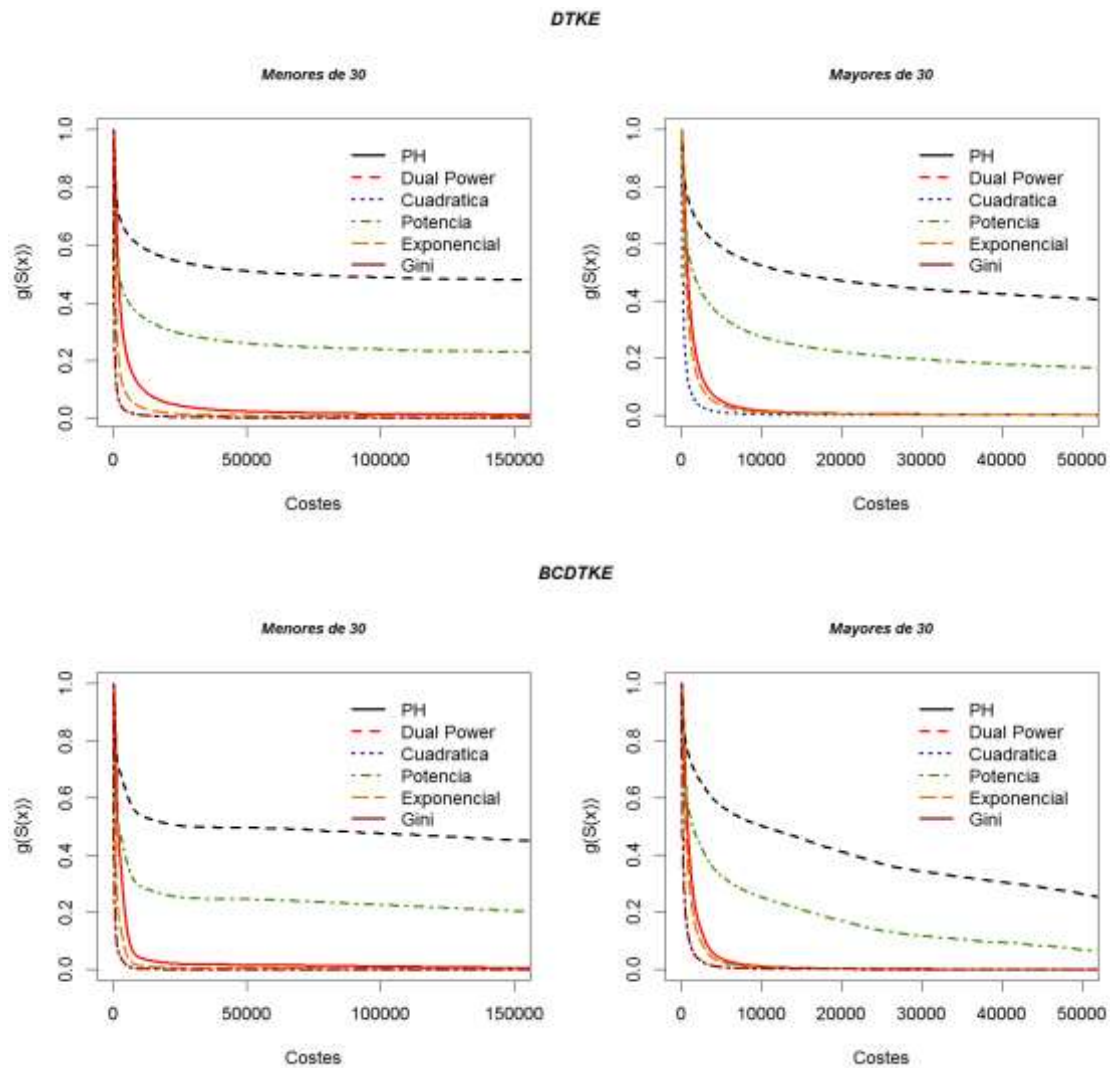


Figura 5.7 Funciones de supervivencia distorsionada estimada con los distintos métodos no paramétricos

La figura 5.7 muestra una serie de gráficos que permiten comparar cada función de distorsión obtenida con los diferentes métodos de estimación de la $S_X(x)$ en los dos grupos de conductores. A simple vista se puede observar que las funciones de distorsión que cumplen con el objetivo de reponderar las probabilidades iniciales para dar más peso a los eventos poco probables y conseguir una cola más pesa que permita una mejor medición del riesgo, son las funciones de distorsión PH y de Potencia. Las demás funciones no logran dar el peso necesario a esos eventos poco probables y por lo tanto no consiguen extrapolar los valores extremos en la cola derecha de la distribución.

Tabla 5.2 Ratio para cada método de estimación de la $S_X(X)$ con respecto a la Empírica. Conductores mayores de 30

Función de Distorsión	Parámetros	Empírica	CKE	BCKE	DTK	BCKE
PH	$r = 10$	1	1.000174	1.000026	10.761430	2.523011
DP	$k = 10$	1	1.000406	1.000057	1.232694	1.030232
Cuadrática	$q = 0.999$	1	1.001996	1.000171	1.117187	1.020387
Potencia	$v = 0.20$	1	1.000323	1.000047	7.281963	1.870938
Exponencial	$e = 0.999$	1	1.000567	1.000062	1.211612	1.027744
Gini	$p = 0.999$	1	1.001965	1.000037	1.432295	1.066805

Tabla 5.3 Ratio para cada método de estimación de la $S_X(X)$ con respecto a la Empírica Conductores menores de 30

Función de Distorsión	Parámetros	Empírica	CKE	BCKE	DTK	BCKE
PH	$r = 10$	1	1.000004	0.999998	2.041866	1.916732
Dual Power	$k = 10$	1	1.000140	0.999938	1.551317	1.086191
Cuadrática	$q = 0.999$	1	1.001965	1.000037	1.432295	1.066805
Potencia	$v = 0.20$	1	1.000011	0.999995	1.989485	1.759551
Exponencial	$e = 0.999$	1	1.000301	0.999944	1.524057	1.081670
Gini	$p = 0.999$	1	1.001965	1.000037	1.432295	1.066805

En el caso de los métodos de estimación de la $S_X(x)$ para obtener las diferentes medidas de riesgos basadas en funciones de distorsión se puede determinar que la empírica, el CKE y el BCKE producen resultados muy similares para todas las medidas de riesgos basadas en funciones de distorsión en ambos grupos. Si observamos los ratios obtenidos en la tabla 5.2 y 5.3 de cada método con respecto a la empírica, el CKE y el BCKE tienen una ratio de prácticamente 1. El ratio en el caso del DTK y BCDTKE difiere según la función de distorsión, para la PH en el caso del DTKE este ratio es de 10 veces el valor de la empírica para mayores de 30 y 2.0 para menores de 30 años, por otro lado el BCDTKE es 2.5 veces en el caso del primer grupo y 1.9 veces en el segundo. Con la función de distorsión de Potencia el DTKE es 7 veces el valor de la empírica para mayores de 30 y 1.9 para menores de 30 años, en cuanto al BCDTKE este es 1.8 veces para el primer grupo y 1.7 para el segundo. Se puede establecer para todas las funciones de distorsión de ambos grupos, excepto el BCKE para la función de distorsión PH, Dual Power, Potencia y Exponencial, que todos los métodos no paramétricos utilizados proporcionan estimaciones por encima del cuantil empírico.

Dado los resultados obtenidos en cada una de las funciones de distorsión aplicadas a los dos grupos de asegurados, es evidente que el grupo de los asegurados menores de 30 posee un mayor riesgo que el grupo de los mayores 30 años Como consecuencia,

el primer grupo debe pagar más por contratar una prima de seguro ya que estos tienden a estar implicados en accidentes más graves.

Conclusión

Al analizar las medidas de riesgos basadas en funciones de distorsión no lineales para medir y cuantificar el riesgo, somos consciente que aplicar estas medidas produce ciertas ventajas cuando la distribución de la pérdida presenta asimetría, como su propio nombre lo indica, el objetivo de las funciones es distorsionar la probabilidades iniciales de la distribución para poder asignar una mayor probabilidad a los valores más extremos, y a su vez, reducir la probabilidad de los más frecuentes. De esta forma la estimación tendrá en cuenta la aversión al riesgo.

Después de aplicar algunas de las medidas de riesgos basadas en funciones de distorsión propuestas en la literatura nos encontramos con el inconveniente de que estas medidas para ser realmente eficientes dependen: i) de la estructura de la función de distorsión, es decir, hay algunas funciones de distorsión que su composición matemática no permite asignar mayores pesos a los valores extremos de la cola, resultando en una distorsión muy leve con respecto a las probabilidades iniciales de la distribución; y ii) el parámetro de aversión al riesgo para cada función de distorsión depende de la función de distribución de la variable. En este caso hay que ser cuidadosos con el valor que se le asigna, ya que puede subestimar o sobreestimar el riesgo.

Además, las funciones de distorsión al reponderar las probabilidades iniciales pueden dar dos resultados: i) una cola más pesada que permita capturar esos valores extremos de la distribución inicial ó ii) una cola más ligera y parecida a la inicial que subestima el riesgo a obtener. En este último resultado intervienen los inconvenientes expuestos más arriba.

Un punto a favor de utilizar métodos no paramétricos de estimación de la fda para obtener la función desacumulativa y así poder estimar las medidas de riesgos basadas en funciones de distorsión, es que cuando esta función trabaja con distribuciones de colas muy pesadas los métodos DTKE y BCDTKE suavizan la forma de la distribución empírica mejorando la eficiencia de la medida de riesgo. No obstante, si la muestra de la pérdida es muy pequeña el DTKE sobrestima el riesgo. Lo más recomendable es utilizar funciones de distorsión que trabajen adecuadamente con valores extremos, como la PH y de Potencia, cuyas funciones de distorsión permiten asignar un mayor peso a esos valores poco probables de la cola derecha de la distribución.

Si por el contrario, se tiene una cola más ligera, el CKE produce mejores resultados que la distribución empírica y los demás métodos de la estimación de la fda.

Bibliografía

s.f.

- Acerbi, C. «Spectral measures of risk: a coherent representation of subjective risk aversion.» *Journal of Banking and Finance*, 26, 2002: 1505-1518.
- Alemany, R., Bolancé, C., Guillén, M. «A nonparametric approach to calculating value-at-risk.» *Insurance: Mathematics and Economics* 52, 2013: 255–262.
- Alemany, R., Bolancé, C., Guillén, M. «Non-parametric estimation of value-at-risk.» *XARXA de Referencia en Economia Aplicada Working paper XREAP*, 2012: 19.
- Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath. «Coherent Measures of Risk.» *Mathematical Finance* 9, 1999: 203-228.
- Balbas, A, Garrido, J., Mayoral, S. «Properties of distortion risk measures.» *Working Paper, University of Navarra* , 2006.
- Bolancé, Buch-Larsen, T., Guillén, M., Nielsen, J., C. «Kernel density estimation for heavy-tailed distributions using the Champenowne transformation.» *Statistics* 39, 2005: 503–518.
- Bolancé, C. «Optimal inverse beta(3,3) transformation in kernel density estimation.» *SORT-Statistics and Operations Research Transactions* 34, 2010: 223–237.
- Bolancé, C., Guillén, M., Nielsen, J. «Inverse beta transformation in kernel density estimation.» *Statistics & Probability Letters* 78, 2008: 1757–1764.
- Clements, A., Hurn, A., Lindsay, K. «Möbius-like mappings and their use in kernel density estimation.» *Journal of the American Statistical Association* 98, 2003: 993–1000.
- D., Denneberg. «Non-additive measures and integrals.» *Dordrecht: Kluwer*, 1994.
- Föllmer, H., and A. Schied. «Convex Measures of Risk and Trading Constraints.» *Finance and Stochastics* (0), 2002: 429–447.
- Hurlimann, W. «Distribution free comparison of pricing principles.» *Insurance Mathematics and Economics*, 17, 2001: 43-54.
- Kim, C., Kim, S., Park, M., Lee, H. «A bias reducing technique in kernel distribution function estimation.» *Computational Statistics* 21, 2006: 589–601.
- Rockafellar R., Uryasev S. and Zabarankin M. «Deviation measures in generalized linear regression.» *Risk Management and Financial Lab*, 2002.
- Sereda, Ekaterina N. «Distortion Risk Measures in Portfolio Optimization.» 2010.
- Silverman, B. «Density Estimation for Statistics and Data Analysis.» *Chapman & Hall/CRC Finance Series, London*, 1986.
- Wang, S. «A Class of Distortion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks.» *Journal of Risk and Insurance*, 67(1), 2000: 15-36.
- Wang, S. «Premium calculation by transforming the layer premium density.» *ASTIN Bulletin* 26, 1996: 71–92.

- Wang, S. S. and V. R. Young,. «Ordering Risks: Expected Utility Theory versus Yaari's Dual Theory of Risk.» *Insurance: Mathematics and Economics*, 22, 1998: 145-161.
- Wang, S., 1995. «Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms.» *Insurance: Mathematics and Economics* 17, 1995: 43–54.
- Wang, S.S., Young, V.R., Panjer, H.H. «Axiomatic characterisation of insurance prices.» *Insurance: Mathematics and Economics* 21 (2), 1997: 173–183.
- Wirch, J. L. and M. R. Hardy,. «A Synthesis of Risk Measures for Capital Adequacy.» *Insurance: Mathematics and Economics*, 25(3), 1999: 337-347.
- Xianyi Wua, Xian Zhoub. «A new characterization of distortion premiums via countable additivity for comonotonic risks.» *Insurance: Mathematics and Economics* 38, 2006: 145-161.
- Yaari, M. E. «The Dual Theory of Choice under Risk.» *Econometrica*, 55(1), 1987: 95{115.

Apéndice

Tablas

Tabla 1.1 Medida de riesgo basada en la función de distorsión PH por método de estimación de la $S_X(X)$

	Menores de 30		Mayores de 30	
	r = 5	r = 10	r = 5	r = 10
Empírica	33047.84	64270.66	5211.18	9267.243
CKE	33048.31	64270.94	5212.87	9268.857
BCCKE	33047.66	64270.52	5211.43	9267.486
DTK	65748.19	131232.1	37947.64	99728.79
BCDTKE	58149.37	123189.6	9749.8	23381.36

Tabla 1.2 Medida de riesgo basada en la función de distorsión DP por método de estimación de la $S_X(X)$

	Menores de 30		Mayores de 30	
	K = 5	K = 10	k = 5	k = 10
Emperica	1610.79	2825.14	835.17	1328.86
CKE	1611.75	2825.53	835.76	1329.40
BCCKE	1610.71	2824.96	835.22	1328.93
DTK	2403.04	4382.69	993.06	1638.08
BCDTKE	1733.72	3068.64	856.12	1369.03

Tabla 1.3 Medida de riesgo basada en la función de distorsión de Gini por método de estimación de la $S_X(X)$

	Menores de 30			Mayores de 30		
	$p = 0,99$	$p = 0,995$	$p = 0,999$	$p = 0,99$	$p = 0,995$	$p = 0,999$
Emperica	738.3472	740.0429	741.3994	422.7563	790.9286	790.9286
CKE	739.7969	741.4964	742.856	423.5992	424.5095	425.2377
BCCKE	738.3736	740.0698	741.4268	425.2377	423.736	423.736
DTK	1057.413	1059.908	1061.903	486.5692	487.6364	488.4902
BCDTKE	787.6538	789.4731	790.9286	431.3698	432.2989	433.0421

Tabla 1.4 Medida de riesgo basada en la función de distorsión Potencia según método de estimación de la $S_X(X)$

	Menores de 30		Mayores de 30	
	$v = 0.10$	$v = 0.20$	$v = 0.10$	$v = 0.20$
Emperica	10810.29	5211.183	835.17	211.183
CKE	10811.95	5212.868	835.76	212.868
BCCKE	10811.88	5211.43	835.22	211.43
DTK	20503.08	37947.64	993.06	2847.64
BCDTKE	12783.78	9749.799	856.12	759.799

Tabla 1.5 Medida de riesgo basada en la función de distorsión Cuadrática según método de estimación de la $S_X(X)$

	Menores de 30			Mayores de 30		
	$q = 0,99$	$q = 0,995$	$q = 0,999$	$q = 0,99$	$q = 0,995$	$q = 0,999$
Emperica	738.35	740.04	741.40	422.76	423.60	424.39
CKE	739.80	741.50	742.86	423.60	424.51	425.24
BCCKE	738.37	740.07	741.43	422.83	423.74	424.46
DTK	1057.41	1059.91	1061.90	472.26	473.29	474.12
BCDTKE	787.65	789.47	790.93	431.37	432.30	433.04

Tabla 1.6 Medida de riesgo basada en la función de distorsión Exponencial por método de estimación de la $S_X(X)$

	Menores de 30			Mayores de 30		
	$e = 0,99$	$e = 0,995$	$e = 0,999$	$e = 0,99$	$e = 0,995$	$e = 0,999$
Emperica	1488.06	1488.06	2070.04	769.56	848.24	1019.43
CKE	1488.95	1667.41	2070.67	770.19	848.85	1020.01
BCCKE	2070.67	1666.52	2069.93	769.61	848.30	1019.50
DTK	2223.71	2506.66	3154.87	916.12	1015.50	1235.16
BCDTKE	1602.31	1797.21	2239.10	788.97	870.32	1047.72

Código R

Funciones de distorsión y medida de riesgo

#Programación de las diferentes funciones de distorsión

Función de distorsión PH

```
proportionalHazard <- function(S, gamma){  
  g_S <- array(,length(S))  
  g_S <- S^(1/gamma);  
  return(g_S)  
}
```

Función de distorsión DP

```
DualPT <- function (S, k){  
  g_S <- array(,length(S))  
  g_S <- 1-(1-S)^k  
  return(g_S)  
}
```

Función de distorsión Cuadratica

```
ctic<-function(S,k){  
  g_S <- array(,length(S))  
  g_S <- S + k*(S-S^2)  
  return(g_S)  
}
```

Función de distorsión de Potencia

```
TpotenciaD <- function(S, alpha){  
  g_S <- array(,length(S))  
  g_S <- 1-(1-S)^1/alpha;  
  return(g_S)  
  
}
```

Función de distorsión de Gini

```
Gini<-function(S, p){  
  g_S <- array(,length(S))  
  g_S <- ((1 + p)*S) - (p*(S^2));  
  return(g_S)  
}
```

Función de distorsión Exponencial

```
Exponencial<-function(S, lamda){  
  g_S<-array(,length(S))  
  g_S<-(1-lamda^S)/(1-lamda);  
  return(g_S)  
}
```

Medida de riesgo

```
riskD <- function(x,S) {  
  R = trapz(x,S);  
  return(R)  
}
```

Métodos de estimación de la fda

Para programar los distintos métodos de estimación de la fda se cargaron las siguientes librerías:

```
library(kerdiest)  
library(numDeriv)  
library(spuRs)  
library(actuar)  
library(pracma)  
library(EnvStats)
```

Resumen estadístico del coste de las reclamaciones de los asegurados menores de 30 y mayores de 30

Mayores de 30

```
dat.v<-as.numeric(as.matrix(dat.v))  
summary(dat.v) #Resumen medidas de posocion  
sd(dat.v) #Desviacion E.
```

Menores de 30

```
dat.j<-as.numeric(as.matrix(dat.j))  
summary(dat.j)#Resumen medidas de posocion  
sd(dat.j)#Desviacion E.
```

Todos los datos

```
dat.t<-as.numeric(as.matrix(dat.t))  
summary(dat.t)#Resumen medidas de posocion  
sd(dat.t)#Desviacion estandat
```

Estimación de las Sx con los diferentes métodos propuestos

Estimación de la distribución Champernowne

Parámetros de la distribución Champernowne para los dos grupos

par.v <- c(1.145, 68, 0.000) #Mayores de 30

par.j <- c(1.116, 66, 0.000) #Menores de 30

par <- as.vector(par.v)

par <- as.vector(par.j)

#Función de distribución acumulada (f.d.a) de la Champernowne Modificada

f.d.a de la champarnowne modificada para mayores de 30

pchamp.v <- function(x, par.v)

{

 a <- par.v[1]

 M <- par.v[2]

 c <- par.v[3]

$((x+c)^a - c^a) / ((x+c)^a + (M+c)^{a-2} \cdot c^a)$

}

pchamp.v(dat.v, par.v)

f.d.a de la champarnowne modificada para menores de 30

pchamp.j <- function (x, par.j)

{

 a=par.j[1]

 M=par.j[2]

 c=par.j[3]

$((x+c)^a - c^a) / ((x+c)^a + (M+c)^{a-2} \cdot c^a)$

}

pchamp.v(dat.j, par.j)

Función del núcleo clásico para estimar la f.d.a

F.d.a del núcleo de Epanechnikov

ke <- function(u) 0.75*(1-u^2)*(abs(u)<1) #Función de densidad de probabilidad

KE= function(u) 0.25*(2+3*u-u^3)*(abs(u)<=1) + (u>1) ##CDF (Funcion de distriucion acumulada) Epa

Function kernel de Epanechnikov

kernel <- function(x) {0.75 * (1 - x^2) * (abs(x) <= 1)}

Estimador Núcleo clásico

kernden <- function (x, z, b, kerl){

```

# parameters: x=variable; b=bandwidth; z=grid point; ker=kernel
nz <- length(z)
nx <- length(x)
x0 <- rep(1, nx * nz)
dim(x0) <- c(nx, nz)
x1 <- t(x0)
x0 <- x*x0
x1 <- z*x1
x0 <- x0-t(x1)
if (kerl == 2) {x1 <- dbeta(z, (x0/b) + 1, ((1- (x0/b))/b) + 1)} # kernel
if (kerl == 1) {x1 <- kernel(x0/b)} # Epanechnikov kernel
if (kerl == 0) {x1 <- dnorm(x0/b)} # normal kernel
f1 <- apply(x1, 2, mean)/b
return(f1)
}

# Función de densidad de la distribución beta (3,3)
densbeta <- function(x) {(abs(x) < 1) * (15/16) * (1 - x * x)^2} # pdf Beta(3,3)

# Función de distribución acumulada de la beta(3,3)
Distbeta <- function(x)
(((3/16) * x^5) - ((5/8) * x^3) + (15/16) * x + 0.5) * (abs(x) <= 1) + ( x > 1) #cdf Beta(3,3)

# Inversa de la distribución beta
inv.beta <- function(p)
uniroot(function(x,p) Distbeta(x) - p, c(-1, 1), p=p)$root      ## Inverse Beta(3,3))
##CDF-- F tild--Double inverse Beta corregido

#Límites y derivadas continuas de la F.D.A
u1=integrate(function(x)x*kernel(x),lower=-1,upper=1)$value      ##=0
u2=integrate(function(x)(x^2)*kernel(x),lower=-1,upper=1)$value  ##=0.2
u3=integrate(function(x)(x^3)*kernel(x),lower=-1,upper=1)$value  ## =0
u4=integrate(function(x)(x^4)*kernel(x),lower=-1,upper=1)$value  ##=0.08571429

# Lambda
L <- function(t) sqrt((1 + 2 * t) * u2/(2 * t))
lambda <- 0.0799
l <- L(lambda)
# Varianza del estimador núcleo transformado
Vopt <- -0.1472244
# Sesgo del estimador núcleo transformado
term2d <- ((u2^2) * (3 * (1 + 6 * lambda)/(2 * lambda))) - u4
densbeta5 <- function(x) (315/256) * ((1-x * x)^4) * (abs(x) < 1) #pdf beta(5,5)
Distbeta5 <- function(x) (1/256)* #cdf beta(5,5)

```

```
(35 * x^4 - 175 * x^3 + 345 * x^2 - 325 * x + 128) * ((1 + x)^5) * (abs(x) <= 1)
```

Funciones para calcular el ancho de la banda con WISE

```
Int1 <- integrate(function(x) (x^2) * densbeta5(x), lower=-1, upper=1)$value
```

```
f3prime <- function(x) (315/256) * (4 * ((1 + 1) * (3 * ((x + x) * (1 - x * x)^2)) +
  ((1 + 1) * (3 * ((x + x) * (1 - x * x)^2)) + (x + x) * (3 *
    ((1 + 1) * (1 - x * x)^2 - (x + x) * (2 * ((x + x) *
      (1 - x * x))))))))))
```

```
Int2 <- integrate(function(x) (x^2) * (f3prime(x))^2, lower=-1, upper=1)$value
```

```
# Inverse Beta(5,5)
```

```
inv.beta5 <- function(p)
```

```
uniroot(function(x,p) Distbeta5(x) - p, c(-1, 1), p=p)$root
```

Estimación de la f.d.a con el BCKKE

```
BCKKE <- function(x, dat) {
```

```
  n <- length(dat)
```

```
  sx <- sd(dat)
```

```
  R <- iqr(dat)
```

```
  s <- min(sx, R/1.349);
```

```
  b <- n^(-1/7) * (s) * (-(Vopt)/((0.5289277/72) * (term2d)^2)^(1/7)) ##bMise
```

```
  y <- (
```

```
    kde(type_kernel = "e", vec_data=dat, y = x, bw = b)$Estimated_value+
```

```
    lambda * (
```

```
      kde(type_kernel = "e", vec_data=dat, y = x+l*b, bw = b)$Estimated_value+
```

```
      kde(type_kernel = "e", vec_data=dat, y = x-l*b, bw = b)$Estimated_value
```

```
    ) - lambda * l * b * (
```

```
      kernden(dat, x + l * b, b=b, ker=1) -
```

```
      kernden(dat, x - l * b, b=b, ker=1)))/(1 + 2 * lambda)
```

```
    return(y)
```

```
  }
```

Estimación f.d.a con el DTK

```
DTK <- function(x, data, par, pchamp) {
```

```
  pchamp <- pchamp
```

```
  n <- length(data)
```

```
  p <- c(par[1], par[2], par[3])
```

```
  tr <- pchamp(data, p)
```

```
  IB <- rep(0, n)
```

```
  for(j in 1:n){
```

```
    IB[j] <- inv.beta(tr[j])
```

```
  }
```

```

IBx <- rep(0, length(x))
for(j in 1:length(x)){
  IBx[j] <- inv.beta(pchamp(x[j], p))
}
##bw_x=((9/7)^(1/3))*(n^(-1/3)) #bWise
bw_x <- ((3)^(1/3)) * (n^(-1/3)) #bMise (Parametro de suavizado (ancho de banda) que
minimiza el error cuadratico medio asintoticamente integrado)
y <- kde(type_kernel = "e", vec_data = IB, y = IBx, bw = bw_x)$Estimated_value
return(y)
}

```

Estimación de la f.d.a con BDCKE

```

BDCKE <- function(z, dat, par, pchamp) {
  pchamp <- pchamp
  n <- length(dat)
  p <- c(par[1], par[2], par[3])

  x <- rep(0, length(z))
  for(i in 1:length(z)){
    x[i] <- inv.beta5(pchamp(z[i], p))
  }
  #Sesgo de estimador de Kernel doblemente transformado
  term2d <- ((u2^2) * (3 * (1 + 6 * lambda)/(2 * lambda))) - u4
  tr <- pchamp.v(dat, p)
  IBB <- rep(0, n)
  for(j in 1:n){
    IBB[j] <- inv.beta5(tr[j])
  }
  #bw_x=n^(-1/7)*(-(Int1*Vopt)/((1/72) * (Int2*term2d)^2 )^(1/7)) #bWise
  bw_x <- n^(-1/7) * (-(Vopt)/((1288.6/72) * (term2d)^2 )^(1/7)) ##bMise
  x1 <- rep(0, length(z))
  x2 <- rep(0, length(z))
  x1 <- x+l * bw_x
  x2 <- x-l * bw_x
  h <- 0.0000000001
  y <- rep(0,length(z))
  grad <- rep(0, length(z))
  for(m in 1:length(z)){
    grad[m] <- (inv.beta5(pchamp.v(z[m] + h, p)) - inv.beta5(pchamp.v(z[m], p)))/h
  }
  y <- ( kde(type_kernel = "e", vec_data=IBB, y = x, bw =bw_x)$Estimated_value+
  lambda * (kde(type_kernel = "e", vec_data=IBB, y = x1, bw =bw_x)$Estimated_value+
  kde(type_kernel = "e", vec_data=IBB, y = x2, bw =bw_x)$Estimated_value) -
  lambda * l * bw_x * (

```



```

kernden(IBB,x1, b=bw_x, ker=1) * grad-
kernden(IBB,x2, b=bw_x, ker=1) * grad
))/(1+2 * lambda)
return(y)
}

```

Cambio de Variable X por Y: Menores de 30

```

dat.j <- as.matrix(dat.j)
n.j <- nrow(as.matrix(dat.j))
rep.j <- ncol(as.matrix(dat.j))
n.j
rep.j
M.j <- c(1, rep.j)
bwise.j <- c(1, rep.j)
par.j

```

```

SS <- seq(-0.9995, 0.9995, by = 0.0001)
y.j <- matrix(SS, ncol = rep.j, nrow =length(SS))
matCKE.j <- matrix(NA, ncol=rep.j, nrow=length(SS))
matFtild.j <- matrix(NA, ncol=rep.j, nrow=length(SS))
matDTK.j <- matrix(NA, ncol=rep.j, nrow=length(SS))
matDTKtild.j <- matrix(NA, ncol=rep.j, nrow=length(SS))
Tgrid.j <- matrix(NA, ncol=rep.j, nrow=length(SS))

```

Cambio de variables mayores de 30

```

dat.v <- as.matrix(dat.v)
n.v <- nrow(as.matrix(dat.v))
rep.v <- ncol(as.matrix(dat.v))
n.v
rep.v
M.v <- c(1, rep.v)
bwise.v <- c(1, rep.v)
par.v

```

```

SS <- seq(-0.9995, 0.9995, by = 0.0001)#agregar un decimal mas .... cuanto mas fina la
malla mas precision
y.v <- matrix(SS, ncol = rep.v, nrow =length(SS))
matCKE.v <- matrix(NA, ncol=rep.v, nrow=length(SS))
matFtild.v <- matrix(NA, ncol=rep.v, nrow=length(SS))
matDTK.v <- matrix(NA, ncol=rep.v, nrow=length(SS))
matDTKtild.v <- matrix(NA, ncol=rep.v, nrow=length(SS))
Tgrid.v <- matrix(NA, ncol=rep.v, nrow=length(SS))

```

Resultados

Estimación de la función de supervivencia para los dos grupos de datos

Método Empírico Menores de 30

```
for(k in 1:rep.j){
  M.j[k] <- median(dat.j[,k])
  sx <- sd(dat.j[,k])
  R <- iqr(dat.j[,k])
  s <- min(sx,R/1.349);
  bwise.j[k] <- 3.572*(s)*n.j^(-1/3)  ### bMise
  for(j in 1:length(SS)){
    Tgrid.j[j,k] <- M.j[k]*(1+SS[j])/(1-SS[j])
  }
  matCKE.j[,k] <- kde(type_kernel = "e", vec_data = dat.j[, k], y = Tgrid.j[,k], bw =
  bwise.j[k])$Estimated_value
}
# S(x) con la Empírica
SCKE.j <- 1-matCKE.j
```

Método Empírico Mayores de 30

```
for(k in 1:rep.v){
  M.v[k] <- median(dat.v[,k])
  sx <- sd(dat.v[,k])
  R <- iqr(dat.v[,k])
  s <- min(sx,R/1.349);
  bwise.v[k] <- 3.572 * (s) * n.v^(-1/3)  ### bMise
  for(j in 1:length(SS)){
    Tgrid.v[j,k] <- M.v[k] * (1 + SS[j])/(1 - SS[j])
  }
  matCKE.v[,k] <- kde(type_kernel = "e", vec_data = dat.v[,k], y = Tgrid.v[,k], bw
  =bwise.v[k])$Estimated_value
}
# S(x)
SCKE.v <- 1-matCKE.v
```

Estimación de la S(x) con BCCKE para Menores de 30

```
for(k in 1:rep.j){
  matFtild.j[,k] <- BCCKE(Tgrid.j[,k], dat.j[,k])
}
# S(x)
SBCCKE.j <- 1-matFtild.j
```

Estimación de la S(x) con BCCKE para Menores de 30

```
for(k in 1:rep.v){
```

```

    matFtild.v[,k] <- BCCKE(Tgrid.v[,k], dat.v[,k])
  }
  # S(x)
  SBCCKE.v <- 1 - matFtild.v

# Estimación de la S(x) con DTK para Menores de 30
for(k in 1:rep.j){
  matDTK.j[,k] <- DTK(Tgrid.j[,k], dat.j[,k], par.j, pchamp.j)
}
# S(x)
SDTK.j <- 1-matDTK.j

# Estimación de la S(x) con DTK para Mayores de 30
for(k in 1:rep.v){
  matDTK.v[,k] <- DTK(Tgrid.v[,k], dat.v[,k], par.v, pchamp.v)
}
# S(x)
SDTK.v <- 1 - matDTK.v

# Estimación de la S(x) con BCDTKE para Menores de 30
for(k in 1:rep.j){
  matDTKtild.j[,k] <- BDCKE(Tgrid.j[,k], dat.j[,k], par.j, pchamp.j)
}
SDTKtild.J <- 1 - matDTKtild.j

# Estimación de la S(x) con BCDTK para menores de 30
for(k in 1:rep.v){
  matDTKtild.v[,k] <- BDCKE(Tgrid.v[,k], dat.v[,k], par.v, pchamp.v)
}
# S(x)
SDTKtild.V <- 1 - matDTKtild.v

Distorsión de la S(x) con las distintas funciones
source('riskD.R')
source('VaR.R')
source('tVaR.R')
source('proportionalHazard.R')
source('transformacion de Gini')
source('Transformacion Exponencial')

```

```

#Metodo Empirico
F_fcn<-ecdf(dat.j)
F_xx.j<-F_fcn(Tgrid.j) # returns the percentiles for xx
S_xx.j = 1-F_xx.j

# PH para menores de 30
g.e.j <- proportionalHazard(S_xx.j, 10)
R_e.J <- riskD(Tgrid.j, g.e.j)
R_e.J
g.cke.j <- proportionalHazard(SCKE.j, 10)
R.cke.j <- riskD(Tgrid.j, g.cke.j)
R.cke.j
g.bccke.j <- proportionalHazard(SBCCKE.j, 10)
R.bccke.j <- riskD(Tgrid.j, g.bccke.j)
R.bccke.j
g.dtk.j <- proportionalHazard(SDTK.j, 10)
R.dtk.j <- riskD(Tgrid.j, g.dtk.j)
R.dtk.j
g.dtktild.j <- proportionalHazard(SDTKtild.J, 10)
R.dtktild.j <- riskD(Tgrid.j, g.dtktild.j)
R.dtktild.j
SDTKtild

# PH mayores de 30
g.e.v <- proportionalHazard(S_xx.v, 10)
R_e.v <- riskD(Tgrid.v, g.e.v)
R_e.v
g.cke.v <- proportionalHazard(SCKE.v, 10)
R.cke.v <- riskD(Tgrid.v, g.cke.v)
R.cke.v
g.bccke.v <- proportionalHazard(SBCCKE.v, 10)
R.bccke.v <- riskD(Tgrid.v, g.bccke.v)
R.bccke.v
g.dtk.v <- proportionalHazard(SDTK.v, 10)
R.dtk.v <- riskD(Tgrid.v, g.dtk.v)
R.dtk.v
g.dtktild.v <- proportionalHazard(SDTKtild.V, 10)
R.dtktild.v <- riskD(Tgrid.v, g.dtktild.v)
R.dtktild.v

```

```
# DP menores de 30
```

```
g.ed.j <- DualPT(S_xx.j, 20)
R.ed.j <- riskD(Tgrid.j, g.ed.j)
R.ed.j
g.cked.j <- DualPT(SCKE.j, 20)
R.cked.j <- riskD(Tgrid.j, g.cked.j)
R.cked.j
g.bccked.j <- DualPT(SBCCKE.j, 20)
R.bccked.j <- riskD(Tgrid.j, g.bccked.j)
R.bccked.j
g.dtked.j <- DualPT(SDTK.j, 20)
R.dtked.j <- riskD(Tgrid.j, g.dtked.j)
R.dtked.j
g.dtktildd.j <- DualPT(SDTKtild.J, 20)
R.dtktildd.j <- riskD(Tgrid.j, g.dtktildd.j)
R.dtktildd.j
SDTKtild
```

```
# DP mayores de 30
```

```
g.ed.v <- DualPT(S_xx.v, 10)
R.ed.v <- riskD(Tgrid.v, g.ed.v)
R.ed.v
g.cked.v <- DualPT(SCKE.v, 10)
R.cked.v <- riskD(Tgrid.v, g.cked.v)
R.cked.v
g.bccked.v <- DualPT(SBCCKE.v, 10)
R.bccked.v <- riskD(Tgrid.v, g.bccked.v)
R.bccked.v

g.dtked.v <- DualPT(SDTK.v, 10)
R.dtked.v <- riskD(Tgrid.v, g.dtked.v)
R.dtked.v
g.dtktildd.v <- DualPT(SDTKtild.V, 10)
R.dtktildd.v <- riskD(Tgrid.v, g.dtktildd.v)
R.dtktildd.v
SDTKtild
```

```
# Función de distorsión de Gini menores de 30
```

```
g.eg.j <- Gini(S_xx.j, 0.999)
R.eg.j <- riskD(Tgrid.j, g.eg.j)
R.eg.j
g.ckeg.j <- Gini(SCKE.j, 0.999)
```

```

R.ckeg.j <- riskD(Tgrid.j, g.ckeg.j )
R.ckeg.j
g.bcckeg.j <- Gini(SBCCKE.j, 0.999)
R.bcckeg.j <- riskD(Tgrid.j, g.bcckeg.j)
R.bcckeg.j
g.dtkg.j <- Gini(SDTK.j, 0.999)
R.dtkg.j <- riskD(Tgrid.j, g.dtkg.j)
R.dtkg.j
g.dtktilde.j <- Gini(SDTKtilde.J, 0.999)
R.dtktilde.j <- riskD(Tgrid.j, g.dtktilde.j)
R.dtktilde.j

```

```

# Funcion de Distorsion de Gini
g.eg.v <- Gini(S_xx.v, 0.999)
R.eg.v <- riskD(Tgrid.v, g.eg.v)
R.eg.v
g.ckeg.v <- Gini(SCKE.v, 0.999)
R.ckeg.v <- riskD(Tgrid.v, g.ckeg.v )
R.ckeg.v
g.bcckeg.v <- Gini(SBCCKE.v, 0.999)
R.bcckeg.v <- riskD(Tgrid.v, g.bcckeg.v)
R.bcckeg.v
g.dtkg.v <- Gini(SDTK.v, 0.999)
R.dtkg.v <- riskD(Tgrid.v, g.dtkg.v)
R.dtkg.v
g.dtktilde.v <- Gini(SDTKtilde.V, 0.999)
R.dtktilde.v <- riskD(Tgrid.v, g.dtktilde.v)
R.dtktilde.v

```

```

# Función de distorsión Exponencial para menores de 30
g.ee.j <- Exponencial(S_xx.j, 0.001)
R.ee.j <- riskD(Tgrid.j, g.ee.j)
R.ee.j
g.ckee.j <- Exponencial(SCKE.j, 0.001)
R.ckee.j <- riskD(Tgrid.j, g.ckee.j)
R.ckee.j
g.bcckee.j <- Exponencial(SBCCKE.j, 0.001)
R.bcckee.j <- riskD(Tgrid.j, g.bcckee.j)
R.bcckee.j
g.dtke.j <-Exponencial(SDTK.j, 0.001)
R.dtke.j <-riskD(Tgrid.j, g.dtke.j)
R.dtke.j
g.dtktilde.j <- Exponencial(SDTKtilde.J, 0.001)
R.dtktilde.j <- riskD(Tgrid.j, g.dtktilde.j)

```

R.dtktilde.j

Función de distorsión para mayores de 30

g.ee.v <- Exponencial(S_xx.v, 0.001)

R.ee.v <- riskD(Tgrid.v, g.ee.v)

R.ee.v

g.ckee.v <- Exponencial(SCKE.v, 0.001)

R.ckee.v <- riskD(Tgrid.v, g.ckee.v)

R.ckee.v

g.bccke.v <- Exponencial(SBCKE.v, 0.001)

R.bccke.v <- riskD(Tgrid.v, g.bccke.v)

R.bccke.v

g.dtke.v <- Exponencial(SDTK.v, 0.001)

R.dtke.v <- riskD(Tgrid.v, g.dtke.v)

R.dtke.v

g.dtktilde.v <- Exponencial(SDTKtild.V, 0.001)

R.dtktilde.v <- riskD(Tgrid.v, g.dtktilde.v)

R.dtktilde.v

Función de distorsión de Potencia menores de 30

g.ep.j <- TrPotencia(S_xx.j, 0.10)

R.ep.j <- riskD(Tgrid.j, g.ep.j)

R.ep.j

g.ckep.j <- TrPotencia(SCKE.j, 0.10)

R.ckep.j <- riskD(Tgrid.j, g.ckep.j)

R.ckep.j

g.bcckep.j <- TrPotencia(SBCKE.j, 0.10)

R.bcckep.j <- riskD(Tgrid.j, g.bcckep.j)

R.bcckep.j

g.dtkp.j <- TrPotencia(SDTK.j, 0.10)

R.dtkp.j <- riskD(Tgrid.j, g.dtkp.j)

R.dtkp.j

g.dtktildep.j <- TrPotencia(SDTKtild.J, 0.10)

R.dtktildep.j <- riskD(Tgrid.j, g.dtktildep.j)

R.dtktildep.j

Función de Potencia para mayores de 30

g.ep.v <- TrPotencia(S_xx.v, 0.10)

R.ep.v <- riskD(Tgrid.v, g.ep.v)

R.ep.v

g.ckep.v <- TrPotencia(SCKE.v, 0.10)

R.ckep.v <- riskD(Tgrid.v, g.ckep.v)

R.ckep.v

```

g.bcckep.v <- TrPotencia(SBCCKE.v, 0.10)
R.bccke.v <- riskD(Tgrid.v, g.bcckep.v)
R.bccke.v
g.dtkp.v <- TrPotencia(SDTK.v, 0.10)
R.dtkp.v <- riskD(Tgrid.v, g.dtkp.v)
R.dtkp.v
g.dtktildp.v <- TrPotencia(SDTKtild.V, 0.10)
R.dtktildp.v <- riskD(Tgrid.v, g.dtktildp.v)
R.dtktildp.v

```

Función de Distorsión Cuadrática para menores de 30

```

g.ec.j <- ctic(S_xx.j, 0.999)
R.ec.j <- riskD(Tgrid.j, g.ec.j)
R.ec.j
g.ckec.j <- ctic(SCKE.j, 0.999)
R.ckec.j <- riskD(Tgrid.j, g.ckec.j)
R.ckec.j
g.bcckec.j <- ctic(SBCCKE.j, 0.999)
R.bcckec.j <- riskD(Tgrid.j, g.bcckec.j)
R.bcckec.j
g.dktc.j <- ctic(SDTK.j, 0.999)
R.dktc.j <- riskD(Tgrid.j, g.dktc.j)
R.dktc.j
g.dtktilc.j <- ctic(SDTKtild.J, 0.999)
R.dtktilc.j <- riskD(Tgrid.j, g.dtktilc.j)
R.dtktilc.j

```

Función de Distorsión Cuadrática para mayores 30

```

g.ec.v <- ctic(S_xx.v, 0.999)
R.ec.v <- riskD(Tgrid.v, g.ec.v)
R.ec.v
g.ckec.v <- ctic(SCKE.v, 0.999)
R.ckec.v <- riskD(Tgrid.v, g.ckec.v)
R.ckec.v
g.bcckec.v <- ctic(SBCCKE.v, 0.999)
R.bcckec.v <- riskD(Tgrid.v, g.bcckec.v)
R.bcckec.v
g.dktc.v <- ctic(SDTK.v, 0.999)
R.dktc.v <- riskD(Tgrid.v, g.dktc.v)
R.dktc.v
g.dtktilc.v <- ctic(SDTKtild.V, 0.999)
R.dtktilc.v <- riskD(Tgrid.v, g.dtktilc.v)
R.dtktilc.v

```



```

# Gráficos
#S(x) distorsionada
plot(S_xx, g_S3_xx, lty=1, type='l', xlab = "S(x)", ylab = "g(S(x))", col = "black", lwd = 2)
lines(S_xx, g_s5_xx, lty=2, col='red', lwd = 2)
lines(S_xx, g_s8_xx, lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(S_xx, g_s10_xx, lty=4, col='chartreuse4', lwd = 2)
lines(S_xx, g_s9_xx, lty=5, col='orange3', lwd = 2)
lines(S_xx, g_s11_xx, lty=6, col='darkred', lwd = 2)
legend("bottomright", legend = c('PH', 'Dual Power', 'Cuadratica', 'Potencia',
'Exponencial', 'Gini'), inset=.05, col = c("black", "red", "darkblue", "chartreuse4", "orange3", "darkred"), lty=1:5, cex= 0.75,
horiz=F)

png("R.meto.png", width=1500, height = 700, res=144)
plot(S_xx, g_s5_xx, lty=1, type='l', xlab = "S(x)", ylab = "g(S(x))", col = "black", lwd = 2)
lines(S_xx, g_S3_xx, lty=2, col='red', lwd = 2)
lines(S_xx, g_s8_xx, lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(S_xx, g_s10_xx, lty=4, col='chartreuse4', lwd = 2)
lines(S_xx, g_s9_xx, lty=5, col='orange3', lwd = 2)
lines(S_xx, g_s11_xx, lty=6, col='darkred', lwd = 2)
legend("bottomright", legend = c('PH', 'Dual Power', 'Cuadratica', 'Potencia',
'Exponencial', 'Gini'), inset=.05, col = c("black", "red", "darkblue", "chartreuse4", "orange3", "darkred"), lty=1:5, cex= 1, lwd =
2, horiz=F)
dev.off()

# Funcion de distorsion PH
png("R.hazard.png", width=1500, height = 700, res=144)
par(mfrow=c(1,2))
plot(Tgrid.j, g.e.j, type='l', lty=1, xlim=c(0,150000), lwd = 2, xlab = "Costes", ylab =
"Proporcional Hazard", col = 'black')
lines(Tgrid.j, g.cke.j, lty=2, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.bckke.j, lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.dtk.j, lty=4, col='red', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.dtkild.j, lty=5, col='chartreuse4', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('Empirica', 'CKE', 'BCKKE', 'DTKE', 'BCDTKE'), inset=.05, col
= c("black", "orange3", "darkblue", "red", "chartreuse4"), bty = "n", lty=1:5, cex= 1, lwd
= 2, horiz=F)
title('Menores de 30', cex.main = 1, font.main = 4)
dev.off()

plot(Tgrid.v, g.e.v, type='l', lty=1, xlim=c(0,150000), lwd = 2, xlab = "Costes", ylab =
"Proporcional Hazard", col = 'black')
lines(Tgrid.v, g.cke.v, lty=2, col='orange3', lwd = 2)

```

```

lines(Tgrid.v, g.bccke.v, lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.dtk.v, lty=4, col= 'red', lwd = 2 )
lines(Tgrid.v, g.dtkild.v, lty=5, col= 'chartreuse4', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('Empirica', 'CKE', 'BCCKE', 'DTKE', 'BCDTKE'),inset=.05, col
= c("black", "orange3", "darkblue", "red", "chartreuse4"), lty=1:5, bty = "n", cex= 1, lwd
= 2, horiz=F)
title('Mayores de 30', cex.main = 1, font.main = 4)
dev.off()

```

```

plot(Tgrid.j, g.e.j ,type='l',lty=1,xlim=c(0,150000), lwd = 2, xlab = "Costes", ylab =
"Proportional Hazard", col = 'gray')
lines(Tgrid.j, g.cke.j, lty=2, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.bccke.j, lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.dtk.j, lty=4, col= 'red', lwd = 2 )
lines(Tgrid.j, g.dtkild.j, lty=5, col= 'chartreuse4', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('Empirica', 'CKE', 'BCCKE', 'DTK', 'BDCKE'),inset=.05, col =
c("black", "red", "darkblue", "chartreuse4", "orange3", "darkred"), lty=1:5, cex= 1, lwd =
2, horiz=F)
title('Menores de 30', cex.main = 1, font.main = 4)

```

```

#Funcion de Distorsion Dual Power menores de 30
png("R.dual.png", width=1500, height = 700, res=144)
par(mfrow=c(1,2))
plot(Tgrid.j, g.ed.j ,type='l',lty=1,xlim=c(0,10000), lwd = 2, xlab = "Costes", ylab = "Dual
Power", col = 'gray')
lines(Tgrid.j, g.cked.j, lty=2, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.bccked.j, lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.dtked.j, lty=4, col= 'red', lwd = 2 )
lines(Tgrid.j, g.dtkildd.j, lty=5, col= 'chartreuse4', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('Empirica', 'CKE', 'BCCKE', 'DTKE', 'BCDTKE'),inset=.05, col
= c("black", "orange3", "darkblue", "red", "chartreuse4"), lty=1:5, bty = "n", cex= 1, lwd =
2, horiz=F)
title('Menores de 30', cex.main = 1, font.main = 4)

```

```

plot(Tgrid.v, g.ed.v ,type='l',lty=1,xlim=c(0,10000), lwd = 2, xlab = "Costes", ylab = "Dual
Power", col = 'gray')
lines(Tgrid.v, g.cked.v, lty=2, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.bccked.v, lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.dtked.v, lty=4, col= 'red', lwd = 2 )
lines(Tgrid.v, g.dtkildd.v, lty=5, col= 'chartreuse4', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('Empirica', 'CKE', 'BCCKE', 'DTKE', 'BCDTKE'),inset=.05, col
= c("black", "orange3", "darkblue", "red", "chartreuse4"), lty=1:5, bty = "n", cex= 1, lwd =
2, horiz=F)

```

```
title('Mayores de 30', cex.main = 1, font.main = 4)
dev.off()
```

```
# Funcion de distorsion Exponencial para menores de 30
png("R.expo.png", width=1500, height = 700, res=144)
par(mfrow=c(1,2))
plot(Tgrid.j, g.ee.j ,type='l',lty=1,xlim=c(0,5000), lwd = 2, xlab = "Costes", ylab =
"Exponencial", col = 'gray')
lines(Tgrid.j, g.ckee.j, lty=2, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.bckee.j, lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.dtke.j, lty=4, col= 'red', lwd = 2 )
lines(Tgrid.j, g.dtkilde.j, lty=5, col= 'chartreuse4', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('Empirica', 'CKE', 'BCKKE', 'DTK', 'BDCKE'),inset=.05, col =
c("black","orange3", "darkblue","red","chartreuse4"), lty=1:5, bty = "n", cex= 1, lwd =
2, horiz=F)
title('Menores de 30', cex.main = 1, font.main = 4)
```

```
plot(Tgrid.v, g.ee.v ,type='l',lty=1,xlim=c(0,5000), lwd = 2, xlab = "Costes", ylab =
"Exponencial", col = 'gray')
lines(Tgrid.v, g.ckee.v, lty=2, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.bckee.v, lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.dtke.v, lty=4, col= 'red', lwd = 2 )
lines(Tgrid.v, g.dtkilde.v, lty=5, col= 'chartreuse4', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('Empirica', 'CKE', 'BCKKE', 'DTK', 'BDCKE'),inset=.05, col =
c("black","orange3", "darkblue","red","chartreuse4"), lty=1:5, bty = "n", cex= 1, lwd =
2, horiz=F)
title('Mayores de 30', cex.main = 1, font.main = 4)
dev.off()
```

```
#Funcion de distorsion de Gini para menores de 30
png("R.gini.png", width=1500, height = 700, res=144)
par(mfrow=c(1,2))
plot(Tgrid.j, g.eg.j ,type='l',lty=1,xlim=c(0,5000), lwd = 2, xlab = "Costes", ylab =
"Exponencial", col = 'gray')
lines(Tgrid.j, g.ckeg.j, lty=2, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.bckeg.j, lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.dtkg.j, lty=4, col= 'red', lwd = 2 )
lines(Tgrid.j, g.dtkildg.j, lty=5, col= 'chartreuse4', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('Empirica', 'CKE', 'BCKKE', 'DTK', 'BDCKE'),inset=.05, col =
c("black","orange3", "darkblue","red","chartreuse4"), lty=1:5, bty = "n", cex= 1, lwd =
2, horiz=F)
title('Menores de 30', cex.main = 1, font.main = 4)
```

```
# Funcion de Distorsion de Gini para mayores de 30
plot(Tgrid.v, g.eg.v ,type='l',lty=1,xlim=c(0,5000), lwd = 2, xlab = "Costes", ylab =
"Exponencial", col = 'gray')
lines(Tgrid.v, g.ckeg.v, lty=2, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.bcckeg.v, lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.dtkg.v, lty=4, col= 'red', lwd = 2 )
lines(Tgrid.v, g.dtkildg.v, lty=5, col= 'chartreuse4', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('Empirica', 'CKE', 'BCCKE', 'DTK', 'BDCKE'),inset=.05, col =
c("black","orange3", "darkblue","red","chartreuse4"), lty=1:5, bty = "n", cex= 1, lwd =
2, horiz=F)
title('Mayores de 30', cex.main = 1, font.main = 4)
dev.off()
```

```
#Funcion de distorsion de Potencia para menores de 30
png("R.pot.png", width=1500, height = 700, res=144)
par(mfrow=c(1,2))
plot(Tgrid.j, g.ep.j ,type='l',lty=1,xlim=c(0,150000), lwd = 2, xlab = "Costes", ylab =
"Potencia", col = 'black')
lines(Tgrid.j, g.ckep.j, lty=2, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.bcckep.j, lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.dtkp.j, lty=4, col= 'red', lwd = 2 )
lines(Tgrid.j, g.dtkildp.j, lty=5, col= 'chartreuse4', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('Empirica', 'CKE', 'BCCKE', 'DTK', 'BDCKE'),inset=.05, col =
c("black","red","darkblue","chartreuse4","orange3","darkred"), lty=1:5, bty = "n", cex=
1, lwd = 2, horiz=F)
title('Menores de 30', cex.main = 1, font.main = 4)
```

```
# Función de distribución de Potencia para mayores de 30
plot(Tgrid.v, g.ep.v ,type='l',lty=1,xlim=c(0,150000), lwd = 2, xlab = "Costes", ylab =
"Potencia", col = 'black')
lines(Tgrid.v, g.ckep.v, lty=2, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.bcckep.v, lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.dtkp.v, lty=4, col= 'red', lwd = 2 )
lines(Tgrid.v, g.dtkildp.v, lty=5, col= 'chartreuse4', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('Empirica', 'CKE', 'BCCKE', 'DTK', 'BDCKE'),inset=.05, col =
c("black","orange3", "darkblue","red","chartreuse4"), lty=1:5, bty = "n", cex= 1, lwd =
2, horiz=F)
title('Mayores de 30', cex.main = 1, font.main = 4)
dev.off()
```

```
# Funcion de distorsion Cuadratica para menores de 30
png("R.cua.png", width=1500, height = 700, res=144)
par(mfrow=c(1,2))
```

```

plot(Tgrid.j, g.ec.j ,type='l',lty=1,xlim=c(0,2000), lwd = 2, xlab = "Costes", ylab =
"Cuadrática", col = 'gray')
lines(Tgrid.j, g.ckec.j, lty=2, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.bckec.j, lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.dktc.j, lty=4, col= 'red', lwd = 2 )
lines(Tgrid.j, g.dtktilc.j, lty=5, col= 'chartreuse4', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('Empirica', 'CKE', 'BCKKE', 'DTK', 'BDCKE'),inset=.05, col =
c("black","orange3", "darkblue","red","chartreuse4"), lty=1:5, bty = "n", cex= 1, lwd =
2, horiz=F)
title('Menores de 30', cex.main = 1, font.main = 4)

```

Funcion de distribucion cuadratica para mayores de 30

```

plot(Tgrid.v, g.ec.v ,type='l',lty=1,xlim=c(0,2000), lwd = 2, xlab = "Costes", ylab =
"Cuadrática", col = 'gray')
lines(Tgrid.v, g.ckec.v, lty=2, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.bckec.v, lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.dktc.v, lty=4, col= 'red', lwd = 2 )
lines(Tgrid.v, g.dtktilc.v, lty=5, col= 'chartreuse4', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('Empirica', 'CKE', 'BCKKE', 'DTK', 'BDCKE'),inset=.05, col =
c("black","orange3", "darkblue","red","chartreuse4"), lty=1:5, bty = "n", cex= 1, lwd =
2, horiz=F)
title('Mayores de 30', cex.main = 1, font.main = 4)
dev.off()

```

S(x) distorsionada – método empírico menores de 30

```

png("R.emp.png", width=1500, height = 700, res=144)
par(mfrow=c(1,2))
plot(Tgrid.j, g.e.j, lty=1,type='l', xlim=c(0, 150000), xlab = "S(x)", ylab = "g(S(x))",col =
"black", lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.ed.j,lty=2, col='red', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.ec.j,lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.ep.j,lty=4, col='chartreuse4', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.ee.j,lty=5, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.eg.j,lty=6, col='darkred', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('PH', 'Dual Power', 'Cuadratica', 'Potencia', 'Exponencial',
'Gini'),inset=.05, col = c("black","red","darkblue","chartreuse4","orange3","darkred"),
border = "white", lty=1:5, cex= 1, lwd = 2, horiz=F)
title('Menores de 30', cex.main = 1, font.main = 4)

```

S(x) distorsionada – método empírico mayores de 30

```

plot(Tgrid.v, g.e.v, lty=1,type='l', xlim=c(0, 50000), xlab = "S(x)", ylab = "g(S(x))",col =
"black", lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.ed.v,lty=2, col='red', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.ec.v,lty=3, col='darkblue', lwd = 2)

```

```

lines(Tgrid.v, g.ep.v,lty=4, col='chartreuse4', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.ee.v,lty=5, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.eg.v,lty=6, col='darkred', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('PH', 'Dual Power', 'Cuadratica', 'Potencia', 'Exponencial',
'Gini'),inset=.05, col = c("black","red","darkblue","chartreuse4","orange3","darkred"),border = "white",
lty=1:5, cex= 1, lwd = 2, horiz=F)
title('Mayores de 30', cex.main = 1, font.main = 4)
dev.off()

```

```

# S(x) distorsionada – método CKE menores de 30
png("R.cke.png", width=1500, height = 700, res=144)
par(mfrow=c(1,2), oma = c(0, 0, 1, 0))
plot(Tgrid.j, g.cke.j, lty=1,type='l', xlim=c(0, 150000), xlab = "Costes", ylab =
"g(S(x))",col = "black", lwd = 2, main = 'Menores de 30', cex.main = 0.8, font.main = 4)
lines(Tgrid.j, g.cked.j,lty=2, col='red', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.ckec.j,lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.ckep.j,lty=4, col='chartreuse4', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.ckee.j,lty=5, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.ckeg.j,lty=6, col='darkred', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('PH', 'Dual Power', 'Cuadratica', 'Potencia', 'Exponencial',
'Gini'),inset=.05, col = c("black","red","darkblue","chartreuse4","orange3","darkred"),
bty = "n", lty=1:5, cex= 1,lwd = 2, horiz=F)

```

```

# S(x) distorsionada – método CKE mayores de 30
plot(Tgrid.v, g.cke.v, lty=1,type='l', xlim=c(0, 50000), xlab = "Costes", ylab = "g(S(x))",col
= "black", lwd = 2, main = 'Mayores de 30', cex.main = 0.8, font.main = 4)
lines(Tgrid.v, g.cked.v,lty=2, col='red', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.ckec.v,lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.ckep.v,lty=4, col='chartreuse4', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.ckee.v,lty=5, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.ckeg.v,lty=6, col='darkred', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('PH', 'Dual Power', 'Cuadratica', 'Potencia', 'Exponencial',
'Gini'),inset=.05, col = c("black","red","darkblue","chartreuse4","orange3","darkred"),
bty = "n", lty=1:5, cex= 1, lwd = 2, horiz=F)
title('CKE', cex.main = 1, font.main = 4, outer = T)
dev.off()

```

```

# S(x) distorsionada – método DTK menores de 30
png("R.dtk.png", width=1500, height = 700, res=144)
par(mfrow=c(1,2), oma = c(0, 0, 1, 0))
plot(Tgrid.j, g.dtked.j, lty=1,type='l', xlim=c(0, 150000), xlab = "Costes", ylab =
"g(S(x))",col = "red", lwd = 2, main = 'Menores de 30', cex.main = 0.8, font.main = 4)

```

```

lines(Tgrid.j, g.dtk.j,lty=2, col='black', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.dktc.j,lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.dtkp.j,lty=4, col='chartreuse4', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.dtke.j,lty=5, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.dtkg.j,lty=6, col='darkred', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('PH', 'Dual Power', 'Cuadratica', 'Potencia', 'Exponencial',
'Gini'),inset=.05, col = c("black","red","darkblue","chartreuse4","orange3","darkred"),
bty = "n", lty=1:5, cex= 1, lwd = 2, horiz=F)

```

```

# S(x) distorsionada – método DTK mayores de 30
plot(Tgrid.v, g.dtked.v, lty=1,type='l', xlim=c(0, 50000), xlab = "Costes", ylab =
"g(S(x))",col = "red", lwd = 2, main = 'Mayores de 30', cex.main = 0.8, font.main = 4)
lines(Tgrid.v, g.dtk.v, lty=2, col='black', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.dktc.v,lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.dtkp.v,lty=4, col='chartreuse4', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.dtke.v,lty=5, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.dtkg.v,lty=6, col='darkred', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('PH', 'Dual Power', 'Cuadratica', 'Potencia', 'Exponencial',
'Gini'),inset=.05, col = c("black","red","darkblue","chartreuse4","orange3","darkred"),
bty = "n", lty=1:5, cex= 1, lwd = 2, horiz=F)
title('DTKE', cex.main = 1, font.main = 4, outer = T)
dev.off()

```

```

# S(x) distorsionada – método BCDTKE menores de 30
png("R.bdtke.png", width=1500, height = 700, res=144)
par(mfrow=c(1,2), oma = c(0, 0, 1, 0))
plot(Tgrid.j, g.dtktildd.j, lty=1,type='l', xlim=c(0, 150000), xlab = "Costes", ylab =
"g(S(x))",col = "red", lwd = 2, main = 'Menores de 30', cex.main = 0.8, font.main = 4)
lines(Tgrid.j, g.dtktild.j,lty=2, col='black', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.dtktilc.j,lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.dtktildp.j,lty=4, col='chartreuse4', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.dtktilde.j,lty=5, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.dtktildg.j,lty=6, col='darkred', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('PH', 'Dual Power', 'Cuadratica', 'Potencia', 'Exponencial',
'Gini'),inset=.05, col = c("black","red","darkblue","chartreuse4","orange3","darkred"),
bty = "n", lty=1:5, cex= 1, lwd = 2, horiz=F)

```

```

# S(x) distorsionada – método BCDTKE mayores de 30
plot(Tgrid.v, g.dtktildd.v, lty=1,type='l', xlim=c(0, 50000), xlab = "Costes", ylab =
"g(S(x))",col = "red", lwd = 2, main = 'Mayores de 30', cex.main = 0.8, font.main = 4)
lines(Tgrid.v, g.dtktild.v, lty=2, col='black', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.dtktilc.v,lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.dtktildp.v,lty=4, col='chartreuse4', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.dtktilde.v,lty=5, col='orange3', lwd = 2)

```

```

lines(Tgrid.v, g.dtkildg.v,lty=6, col='darkred', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('PH', 'Dual Power', 'Cuadratica', 'Potencia', 'Exponencial',
'Gini'),inset=.05, col = c("black","red","darkblue","chartreuse4","orange3","darkred"),
bty = "n", lty=1:5, cex= 1, lwd = 2, horiz=F)
title('BCDTKE', cex.main = 1, font.main = 4, outer = T)
dev.off()

```

```

# S(x) distorsionada – método BCCTKE menores de 30
png("R.bccke.png", width=1500, height = 700, res=144)
par(mfrow=c(1,2), oma = c(0, 0, 1, 0))
plot(Tgrid.j, g.bccked.j, lty=1,type='l', xlim=c(0, 150000), xlab = "Costes", ylab =
"g(S(x))",col = "red", lwd = 2, main = 'Menores de 30', cex.main = 0.8, font.main = 4)
lines(Tgrid.j, g.bccke.j,lty=2, col='black', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.bcckec.j,lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.bcckep.j,lty=4, col='chartreuse4', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.bcckee.j,lty=5, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.j, g.bcckeg.j,lty=6, col='darkred', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('PH', 'Dual Power', 'Cuadratica', 'Potencia', 'Exponencial',
'Gini'),inset=.05, col = c("black","red","darkblue","chartreuse4","orange3","darkred"),
bty = "n", lty=1:5, cex= 1, lwd = 2, horiz=F)

```

```

# S(x) distorsionada – método BCCTKE mayores de 30
plot(Tgrid.v, g.bccked.v, lty=1,type='l', xlim=c(0, 50000), xlab = "Costes", ylab =
"g(S(x))",col = "red", lwd = 2, main = 'Mayores de 30', cex.main = 0.8, font.main = 4)
lines(Tgrid.v, g.bccke.v, lty=2, col='black', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.bcckec.v,lty=3, col='darkblue', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.bcckep.v,lty=4, col='chartreuse4', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.bcckee.v,lty=5, col='orange3', lwd = 2)
lines(Tgrid.v, g.bcckeg.v,lty=6, col='darkred', lwd = 2)
legend("topright", legend = c('PH', 'Dual Power', 'Cuadratica', 'Potencia', 'Exponencial',
'Gini'),inset=.05, col = c("black","red","darkblue","chartreuse4","orange3","darkred"),
bty = "n", lty=1:5, cex= 1, lwd = 2, horiz=F)
title('BCDTKE', cex.main = 1, font.main = 4, outer = T)
dev.off()

```